

LICEO

SCCC

Gennaio 2021

Guida alle competenze di base in matematica. Un approccio concreto



DECS

Divisione della scuola

Sezione dell'insegnamento medio superiore

Indice

Premessa	3
Introduzione	4
1 Nozioni di logica e insiemistica	5
1.1 Insiemi	5
1.2 Funzioni	8
1.3 Logica	11
2 Calcolo elementare e applicazioni	12
2.1 Calcolo mentale con operazioni elementari	12
2.2 Calcolo numerico e algebrico	13
2.3 Proporzionalità diretta e inversa	14
2.4 Potenze e logaritmi	15
2.5 Equazioni lineari	17
2.6 Equazioni non lineari	19
2.6.1 Equazioni quadratiche	19
2.6.2 Equazioni razionali e radicali	20
2.6.3 Equazioni esponenziali e logaritmiche	21
2.7 Sistemi di equazioni	21
2.8 Disequazioni	22
3 Geometria	23
3.1 Geometria euclidea	23
3.1.1 Angoli e poligoni di n lati	23
3.1.2 Area del triangolo	24
3.1.3 Circonferenza e cerchio	24
3.1.4 Volumi di solidi elementari	24
3.1.5 Similitudine	25
3.1.6 Teorema di Pitagora	25
3.2 Trigonometria e goniometria	26
3.2.1 Misura degli angoli	26
3.2.2 Rapporti trigonometrici	27
3.2.3 Funzioni goniometriche	28
3.2.4 Relazioni goniometriche	28
3.3 Geometria vettoriale e analitica	29
3.3.1 Geometria vettoriale	29
3.3.2 Geometria analitica: distanze, ampiezze, aree, volumi	30
3.3.3 La retta nel piano e nello spazio	31
4 Analisi	33
4.1 Generalità sulle funzioni reali	33
4.1.1 Grafici	33
4.1.2 Composizione e inversa	35

4.2	Proprietà delle funzioni elementari	36
4.3	Limiti	37
4.4	Calcolo differenziale	37
4.4.1	Rapporti incrementali e derivate	37
4.4.2	Regole di derivazione	38
4.4.3	Problemi con valori estremi	38
4.4.4	Discussione delle curve	39
4.5	Calcolo integrale	39
4.5.1	Il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale	39
4.5.2	Integrazione elementare	39
5	Statistica descrittiva	41
5.1	Rappresentazione grafica di dati statistici	41
5.2	Misure di centralità e di dispersione	42
6	Calcolo combinatorio e delle probabilità	43
6.1	Calcolo combinatorio	43
6.2	Definizioni di probabilità	44
6.2.1	Definizione classica o laplaciana	44
6.2.2	Probabilità frequentistica oppure statistica	45
6.2.3	Gli Assiomi di Kolmogorov	46
6.3	Probabilità condizionata	47
6.4	Dipendenza e indipendenza stocastica	48
A	Appendice: Scuola Cantonale di Commercio	49
A.1	Temi non affrontati alla SCC	49
A.2	Matematica finanziaria	50
A.2.1	Capitalizzazione composta	50
A.2.2	Rendite	51

Premessa

Nel 2016 la Conferenza svizzera dei direttori cantonali della pubblica educazione (CDPE) ha emanato delle “raccomandazioni” inerenti alla garanzia a lungo termine per i maturati di poter accedere senza esami di ammissione agli studi universitari. In questo contesto il *Piano quadro degli studi* (1994) è stato completato con un’*Appendice* che contiene una descrizione delle conoscenze e competenze nella lingua prima (per il Cantone Ticino l’italiano) e in matematica considerate prerequisiti indispensabili per intraprendere con successo gli studi universitari in qualsiasi campo. Secondo tali raccomandazioni il Cantone è chiamato a elaborare delle direttive sulle modalità di implementazione di misure che permettano l’acquisizione di queste “competenze di base”. A questo scopo, la Sezione dell’insegnamento medio superiore (SIMS) e il Collegio dei direttori delle Scuole medie superiori (SMS) hanno deciso di interpellare in prima istanza i Gruppi disciplinari cantonali interessati.

Le indicazioni dell’*Appendice* non entrano mai nel merito dei contenuti disciplinari delle singole materie, ma definiscono un campo comune di capacità e di strumenti che si chiede agli allievi di acquisire, aprendo pertanto la strada verso un’ottica interpretativa trasversale ai diversi settori di studio. Pertanto “le competenze di base in matematica necessarie per l’idoneità agli studi superiori non sono definite in maniera così dettagliata da permettere di tradurre direttamente in esercizi pratici le capacità e le conoscenze descritte. Resta quindi salvaguardato il campo d’azione dei docenti per quanto concerne le decisioni didattiche personali e collettive volte a stabilire i livelli di approfondimento e di messa a punto”¹.

Il Gruppo disciplinare cantonale di matematica ha dato seguito al mandato conferitogli dalla SIMS di elaborare possibili strategie per garantire che tutti gli allievi delle SMS acquisiscano le competenze di base adottando un “approccio concreto”, ossia proponendo qualche quesito per ogni tema di base (logica e insiemi, calcolo elementare e applicazioni, geometria, analisi, statistica, calcolo delle probabilità): il risultato, in sostanza, è un eserciziario utile allo sviluppo di tali competenze. All’elaborazione di tale eserciziario hanno contribuito anche i gruppi cantonali delle scienze sperimentali: biologia, chimica e fisica.

Il presente documento è stato condiviso dagli esperti di matematica, dai gruppi di matematica e delle scienze sperimentali, nonché presentato nei Collegi dei docenti delle SMS, e rappresenta, analogamente alla *Guida alle competenze di base nella lingua italiana*², una sorta di Carta che mette a disposizione di docenti, allievi e famiglie i contenuti dell’*Appendice* attraverso una Guida, che ha il pregio di renderli più concreti e fruibili anche da un pubblico di non specialisti.

La Sezione dell’insegnamento medio superiore

¹Cap. 3 dell’*Appendice al Piano quadro degli studi per le scuole di maturità* del 9 giugno 1994. Competenze di base in matematica e nella prima lingua necessarie per l’idoneità generale agli studi superiori del 17 marzo 2016.

²*Guida alle competenze di base nella lingua italiana* del settembre 2019.

Introduzione

Il presente documento desidera descrivere quelle che possono essere definite *competenze di base* in matematica che si acquisiscono con un titolo di studio a livello di scuola media superiore.

Queste *competenze* sono abilità fondamentali che consentono da un lato di affrontare e risolvere un problema strettamente legato alla matematica, dall'altro di applicarsi con rigore allo studio delle altre discipline, con particolare attenzione alle scienze sperimentali, ma non solo. Si pensi ad esempio a quanto sia importante saper leggere e interpretare un grafico attraverso l'uso di strumenti matematici adeguati.

Inoltre, si sottolinea che non si tratta in alcun modo di delineare una soglia della sufficienza, che invece deve sorgere nel contesto pedagogico-didattico che il docente instaura con la sua classe. Senza dimenticare, naturalmente, che il conseguimento degli obiettivi per la sufficienza non deve certo fungere da linea del traguardo, né tantomeno da guida per il lavoro, ma altresì da semplice passaggio verso la ricerca dei risultati ben più elevati ai quali ogni insegnante aspira per i propri allievi.

Lo scritto è impostato come segue: si parte da una tavola di temi matematici di base (*logica e insiemi, calcolo elementare e applicazioni, geometria, analisi, statistica, calcolo delle probabilità*) e per ognuno dei capitoli individuati si propongono alcuni quesiti che fanno emergere sia il percorso legato alle conoscenze da mettere in campo, sia quello relativo alle capacità di utilizzare le medesime con un buon grado di flessibilità, stabilendo giuste e semplici correlazioni fra di esse.

Ogni tema viene introdotto da un certo numero di osservazioni accompagnate da una parte in corsivo dove sono indicati gli obiettivi da raggiungere. La scelta di porre al centro di questo lavoro la tipologia di problemi in matematica è legata alla volontà di promuovere un approccio concreto alla questione *competenze di base* ma non deve assolutamente far dimenticare l'obiettivo fondamentale di favorire un apprendimento atto alla conquista della capacità di strutturare e sintetizzare un ragionamento in modo chiaro e rigoroso, capacità fondamentali anche per affrontare con successo gli studi universitari.

Insomma, le proposte che seguono sono pensate come un punto di partenza per un percorso scolastico dove non manchino mai i momenti nei quali gli insegnanti lavorino con allievi per affinare queste competenze, correggendo eventuali errori e indicando le metodologie e gli strumenti di lavoro più efficaci per raggiungere obiettivi quali l'autonomia di lavoro e di pensiero unita alla capacità di autocritica e ad una giusta consapevolezza di sé.

Il Gruppo cantonale di matematica

1 Nozioni di logica e insiemistica

La matematica possiede sia un proprio linguaggio sia un proprio stile di ragionamento: il linguaggio matematico è basato principalmente sull'*insiemistica*, che permette di formalizzare le affermazioni, e sulla *logica*, che permette di collegarle tra di loro, costituendo il *ragionamento logico-deduttivo* che sta alla base del pensiero matematico. Pertanto la logica e l'insiemistica rivestono il ruolo principale nei fondamenti della matematica.

1.1 Insiemi

A partire dalla seconda metà del XIX secolo, grazie soprattutto al lavoro pionieristico di Georg Cantor, gli insiemi costituiscono i fondamenti per l'introduzione alla matematica. Infatti, si parla di insiemi nelle più disparate branche della matematica: ad esempio in *geometria* si studiano insiemi di punti, quali rette o piani, l'insieme dei poligoni e quello dei poliedri, mentre in *algebra* si studiano l'insieme dei numeri razionali, l'insieme dei numeri reali, quello dei numeri complessi e l'insieme dei polinomi, ... Perciò il concetto di insieme è di fondamentale importanza, poiché permette di uniformare il linguaggio e semplificare l'espressione.

Conoscere la definizione di insieme in senso matematico ed essere in grado di riconoscerla .

Il termine *insieme* viene ampiamente usato in molte espressioni del linguaggio comune. Ad esempio, si parla di insieme degli allievi di una classe, di insieme dei giocatori di una squadra di calcio, ... Nell'ambito della cosiddetta *teoria ingenua degli insiemi*³ si tratta di un sinonimo di collezione o raccolta di oggetti distinguibili tra loro, per cui esiste un criterio oggettivo che permette di stabilire se un qualunque oggetto fa parte oppure no di essa. L'insieme privo di elementi, detto *insieme vuoto*, viene indicato con \emptyset oppure $\{\}$.

Esempio: indicare quali fra le seguenti collezioni di oggetti sono degli insiemi in senso matematico:

- | | |
|--|--------------------------------------|
| a) le squadre vincitrici della Champions League; | b) i cantoni svizzeri; |
| c) le montagne alte; | d) i matematici più conosciuti; |
| e) i libri più famosi; | f) i numeri naturali maggiori di 10; |
| g) gli iscritti ad una SMS per l'a.s. 2020/2021; | h) le persone furbe. |

Saper riconoscere gli elementi di un insieme ed essere in grado di esprimere mediante la simbologia matematica l'appartenenza o meno di un dato elemento ad un dato insieme.

Ciò che caratterizza un insieme sono gli oggetti che lo costituiscono, i suoi *elementi*. È pertanto importante saper determinare obiettivamente gli elementi di un insieme. Per esprimere mediante il linguaggio matematico il fatto che un dato oggetto appartiene o meno ad un dato insieme si introduce il *simbolo di appartenenza* \in che permette di formalizzare matematicamente quanto appena descritto.

³Diversamente da quanto accade nella *teoria assiomatica degli insiemi*, non trattata a livello liceale

Esempi

1. Elencare gli elementi dei seguenti insiemi:
 - a) l'insieme M dei mesi dell'anno;
 - b) l'insieme G dei giorni della settimana;
 - c) l'insieme C dei punti cardinali.
2. Completare gli spazi con il simbolo opportuno, scelto tra \in , \notin , \ni o \ni , sapendo che C è l'insieme delle città con più di 100 000 abitanti, S quello delle località svizzere, E quello delle località europee e M contiene quelle che si affacciano sul mare.

Bellinzona ... E	Bellinzona ... C	Milano ... M	Milano ... C
New York ... M	New York ... S	Aosta ... E	Aosta ... S
S ... Zurigo	Roma ... M	Baghdad ... M	C ... Il Cairo
Rio de Janeiro ... E	S ... Ginevra	C ... Parigi	E ... Gerusalemme

Conoscere la definizione di sottoinsieme ed essere in grado di esprimere mediante la simbologia matematica l'inclusione o meno di un dato insieme in un altro insieme.

In matematica spesso occorre tener conto soltanto di una parte degli elementi che costituiscono un insieme, che possiamo vedere come nuova collezione, quindi come insieme a sua volta. Il fatto di poter considerare insiemi contenuti all'interno di altri implica l'introduzione del concetto di *sottoinsieme* e il conseguente relativo simbolismo matematico, tramite il *simbolo di inclusione* \subset .

Esempio: siano dati gli insiemi

$$A = \{a,b,c,d,e\}; B = \{b,c,e\}; C = \{a\}; D = \{c,d,e\}.$$

Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $B \subset A$ | b) $B \subset D$ | c) $A \supset C$ |
| d) $A \not\subset B$ | e) $A \not\subset D$ | f) $B \not\subset C$ |

Essere in grado di rappresentare insiemi e sottoinsiemi tramite diagrammi di Eulero-Venn.

Un insieme può essere rappresentato graficamente tramite un cosiddetto *diagramma di Eulero-Venn*, e tale rappresentazione è molto utile per comprendere meglio il concetto di sottoinsieme.

Esempi

1. Disegnare un diagramma di Eulero-Venn che rappresenta l'insieme C degli allievi della tua classe. Inoltre indicare i seguenti sottoinsiemi:
 - $S = \{x \in C \mid x \text{ suona uno strumento}\}$;
 - $O = \{x \in C \mid x \text{ porta gli occhiali}\}$;
 - $G = \{x \in C \mid x \text{ abita in un comune con pi\u00f9 di 5 000 abitanti}\}$;
 - $P = \{x \in C \mid x \text{ abita in un comune con meno di 1 000 abitanti}\}$.
2. Un libro di testo \u00e8 composto da 23 capitoli, di cui 10 dedicati al calcolo algebrico e 11 con pi\u00f9 di 40 esercizi. Sapendo che il capitolo sulla scomposizione di polinomi \u00e8 l'unico sul calcolo algebrico con pi\u00f9 di 40 esercizi, rappresentare la situazione con un diagramma di Eulero-Venn, indicando ogni capitolo con un puntino e specificando quale puntino rappresenta il capitolo sulla scomposizione.
3. Sapendo che A , B e C sono tre insiemi e che $a \notin C$, $a \in A$, $a \in B$, $b \notin C$, $b \notin A$, $b \notin B$, $c \in C$, $c \notin A$, $c \in B$, $d \notin C$, $d \in A$, $d \notin B$, $e \in C$, $e \in A$, $e \in B$, $f \in C$, $f \in A$ e $f \notin B$, rappresentare la situazione in un unico diagramma di Eulero-Venn.

Conoscere le principali operazioni tra insiemi e saper interpretare tali operazioni mediante diagrammi di Eulero-Venn.

Cos\u00ec come accade in ambito numerico, dove da due numeri se ne pu\u00f2 creare un terzo (ad esempio sommandoli o moltiplicandoli), anche da due insiemi \u00e8 possibile generarne un altro. Tra le operazioni che ci permettono di creare nuovi insiemi, le pi\u00f9 importanti per noi sono l'*intersezione*, l'*unione*, la *differenza* ed il *prodotto cartesiano*.

Esempi

1. Siano dati gli insiemi seguenti:

$$A = \{1,2,4,9,10,11\}, \quad B = \{1,2,4,5\}, \quad C = \{1,2,4,11\}, \quad D = \{9,10\} \quad \text{e} \quad E = \emptyset.$$

Determinare i seguenti insiemi:

$$\begin{array}{ccccc} A \cap B; & B \cap D; & A \cap D; & B \cup C; & B \cap E; \\ D \cup C; & B \setminus C; & C \setminus D; & C \setminus A; & A \setminus E. \end{array}$$

2. Siano dati tre insiemi A, B e C . Rappresentare tramite diagrammi di Eulero-Venn i seguenti insiemi:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} A \cap (B \cup C); & \text{b)} (A \cap B) \cup C; & \text{c)} A \setminus (B \cap C); \\ \text{d)} (A \setminus B) \cap C; & \text{e)} A \setminus (B \cup C); & \text{f)} (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \end{array}$$

3. Siano dati gli insiemi $A = \{a,b,c\}$ e $B = \{2,3\}$. Determinare $A \times B, B \times A$ e $B^2 = B \times B$.

Essere in grado di risolvere semplici problemi di logica usando il linguaggio degli insiemi e i diagrammi di Eulero-Venn.

Alcuni problemi di logica possono essere risolti in maniera più semplice se vengono tradotti nel linguaggio degli insiemi e rappresentati graficamente mediante diagrammi di Eulero-Venn.

Esempio: in una scuola di 100 alunni, 15 imparano solo il tedesco, 21 il tedesco ma non lo spagnolo, 9 il tedesco e l'inglese, 30 il tedesco, 49 l'inglese, 25 lo spagnolo e l'inglese, 55 lo spagnolo. Determinare quanti allievi non imparano alcuna lingua.

1.2 Funzioni

Spesso e nei più disparati ambiti è possibile incontrare fenomeni che associano ad elementi di un dato insieme elementi di un altro insieme in maniera univoca, pensiamo ad esempio alla velocità di un veicolo o al valore di un'azione in un dato istante. La descrizione di tali fenomeni in ambito matematico si realizza per mezzo del concetto di *funzione*, che rappresenta uno dei più importanti strumenti dell'intera matematica. Tale concetto è caratterizzato dai due insiemi da cui vengono scelti gli elementi e la legge che permette di associarli tra loro.

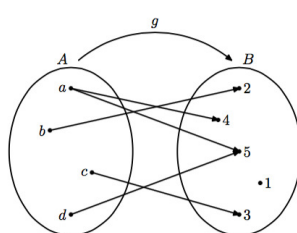
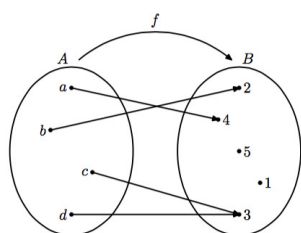
Conoscere la definizione di *funzione*, essere in grado di stabilire se una data legge è una funzione e riuscire a lavorare con la terminologia di base legata alle funzioni.

Esempi

1. Siano dati gli insiemi

$$A = \{a,b,c,d\}, \quad B = \{1,2,3,4,5\}, \quad C = \{1,2,3\} \quad \text{e} \quad D = \{2,4,6,7\}.$$

Determinare quali delle seguenti leggi sono funzioni e in tal caso indicarne anche l'insieme delle immagini.



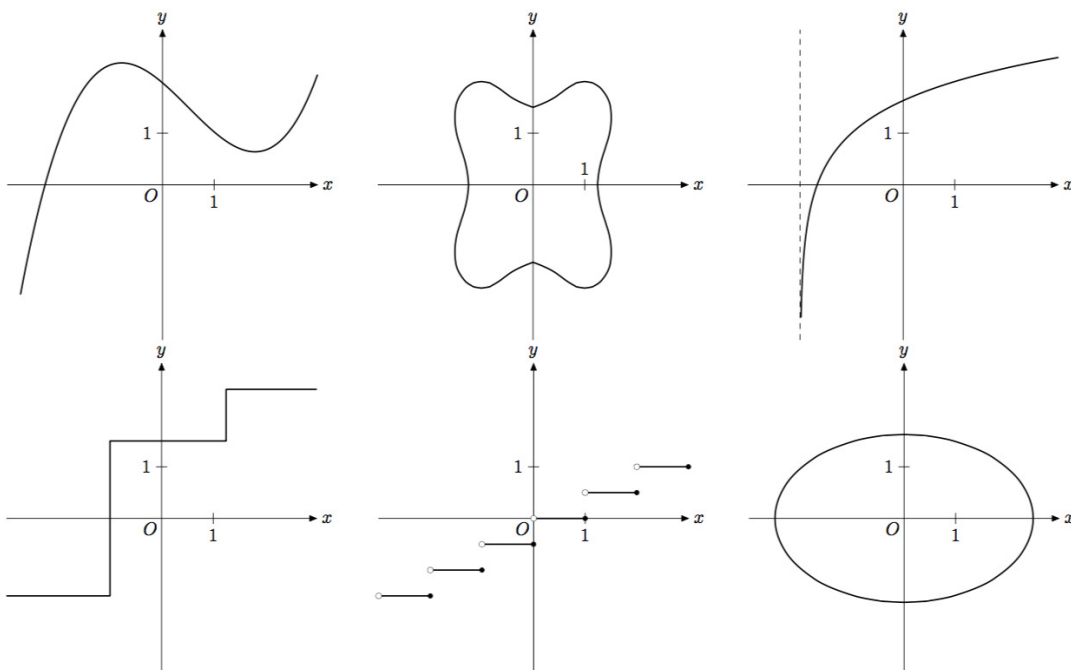
$$\begin{aligned}
 h: A &\longrightarrow D \\
 a &\longmapsto 2 \\
 b &\longmapsto 7 \\
 c &\longmapsto 2 \\
 c &\longmapsto 4 \\
 d &\longmapsto 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i: B &\longrightarrow C \\
 1 &\longmapsto 2 \\
 2 &\longmapsto 1 \\
 3 &\longmapsto 3 \\
 4 &\longmapsto 3 \\
 5 &\longmapsto 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l: C &\longrightarrow D \\
 x &\longmapsto 2x \\
 m: C &\longrightarrow B \\
 x &\longmapsto x + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n: A &\longrightarrow A \\
 x &\longmapsto x \\
 o: B &\longrightarrow D \\
 x &\longmapsto 4
 \end{aligned}$$

2. Indicare, motivando la propria risposta, quali delle seguenti curve nel piano rappresentano il grafico di una funzione.



3. Sia data la funzione reale $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

- Determinare l'immagine di $-3, 0, 1, \frac{5}{3}$ e $\sqrt{2}$.
- Calcolare, se esistono, gli argomenti di $-1, 0, \sqrt{2}$ e 10 .
- Determinare il dominio di f .
- Determinare l'insieme delle immagini di f .

Conoscere il concetto di funzione inversa ed essere in grado di stabilire l'inversa di una funzione in semplici casi.

A volte, una funzione associa in maniera univoca alle immagini di una funzione i relativi argomenti. Ciò implica che l'azione di una funzione può essere anche compiuta a ritroso, permettendo l'introduzione del concetto di *funzione inversa*.

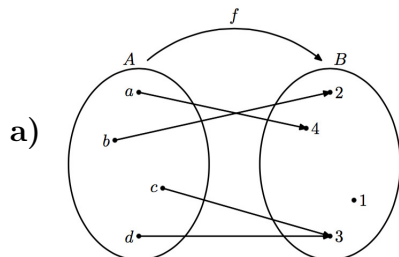
Esempi:

- In fisica, la cosiddetta *legge oraria* associa ad ogni istante la posizione di un corpo di cui si studia il moto.
 - Da un punto di vista matematico, si tratta di una funzione?
 - La legge oraria che descrive un moto oscillatorio è una funzione invertibile?

2. Siano dati gli insiemi

$$A = \{a,b,c,d\}, \quad B = \{1,2,3,4\}, \quad C = \{1,2,3,5\} \quad \text{e} \quad D = \{2,4,6,10\}.$$

Determinare quali delle seguenti funzioni sono invertibili e nel caso di una funzione invertibile determinarne l'inversa:



b)
$$g: C \longrightarrow D$$

$$x \longmapsto 2x$$

c)
$$h: B \longrightarrow C$$

$$1 \longmapsto 2$$

$$2 \longmapsto 1$$

$$3 \longmapsto 3$$

$$4 \longmapsto 5$$

d)
$$i: B \longrightarrow D$$

$$x \longmapsto 4$$

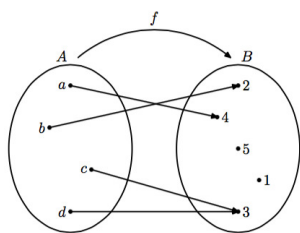
Conoscere il concetto di composizione di due funzioni ed essere in grado di stabilire l'immagine di argomenti sotto l'azione di una composizione di funzioni.

Una delle domande che può sorgere è, come già successo nel caso numerico ed insiemistico, se è possibile utilizzare in modo opportuno due funzioni in modo da crearne una terza. L'operazione più rilevante in questo senso è la *composizione*, ottenuta impiegandole in successione: ciò significa che date due funzioni se ne definisce una terza il cui effetto equivale a quello delle due funzioni applicate una dopo l'altra.

Esempio: siano dati gli insiemi

$$A = \{a,b,c,d\}, \quad B = \{1,2,3,4,5\}, \quad C = \{1,2,3\} \quad \text{e} \quad D = \{2,4,6,7\}$$

e le seguenti funzioni:



$$h: B \longrightarrow C$$

$$1 \longmapsto 2$$

$$2 \longmapsto 1$$

$$3 \longmapsto 3$$

$$4 \longmapsto 3$$

$$5 \longmapsto 1$$

$$g: C \longrightarrow D$$

$$x \longmapsto 2x$$

$$i: B \longrightarrow D$$

$$x \longmapsto 4$$

a) Stabilire

i) $(h \circ f)(c)$; ii) $(i \circ f)(a)$; iii) $(g \circ h)(5)$.

b) Spiegare perché non è possibile definire la funzione $g \circ f$.

1.3 Logica

In matematica è di fondamentale importanza inferire le proprietà soddisfatte da alcuni oggetti come conseguenza di proprietà che sono già note. Per fare ciò non è sufficiente considerare casi specifici, ma occorre effettuare opportune generalizzazioni, per poi *dimostrare* la validità di una tesi nel caso più ampio. La *logica* è quell'area della matematica che permette di formalizzare il ragionamento al fine di dimostrare la validità delle affermazioni.

Comprendere le basi del ragionamento logico-deduttivo, conoscere la differenza tra equivalenza e implicazione materiale.

Il ragionamento logico-deduttivo sta alla base della logica matematica e permette di creare delle vere e proprie catene di affermazioni dove una è conseguente o equivalente alla precedente, al fine di stabilire se data la validità di un'affermazione ne segue la validità di un'altra, oppure in maniera analoga si può determinare se due affermazioni hanno lo stesso significato.

Esempi

1. Dimostrare le seguenti affermazioni:

- a) La somma di un numero pari con un numero dispari è un numero dispari.
- b) Il prodotto di due numeri dispari è un numero dispari.
- c) La differenza tra un numero pari e un numero dispari è un numero dispari.

2. Completare gli spazi con i simboli di implicazione materiale \Rightarrow , \Leftarrow oppure con il simbolo di equivalenza \Leftrightarrow :

a) $x \mid 7 \dots\dots x \mid 14$

c) $x^2 = 25 \dots\dots x = -5$

e) $x \leq -13 \dots\dots -3x + 1 \geq 40$

g) $2x + 5 = 20 \dots\dots x = \frac{15}{2}$

i) $x \in A \Rightarrow x \in B \dots\dots A \subset B$

b) $x \in A \cap B \dots\dots x \in A \text{ e } x \in B$

d) $x^2 - 1 = 99 \dots\dots x \in \{-10, 10\}$

f) $21 \mid x \dots\dots 3 \mid x$

h) $x = 2 \dots\dots x^3 - 7 < 3$

j) $10 \mid x \dots\dots 2 \mid x \text{ e } 5 \mid x$

2 Calcolo elementare e applicazioni

In matematica, saper calcolare numericamente e algebricamente, attraverso un uso corretto delle proprietà delle operazioni, è certamente di basilare importanza per approcciarsi correttamente a un gran numero di problemi. Saper comprendere se un risultato ottenuto non può soddisfare le condizioni poste da un quesito è altresì fondamentale, per evitare errori a volte anche grossolani. Pertanto, saper gestire con una certa flessibilità il calcolo mentale o semplici espressioni letterali è senz'altro un obiettivo imprescindibile.

Inoltre, una situazione matematica può spesso essere tradotta in una o più equazioni o disequazioni; è quindi importante conoscere le tecniche fondamentali atte a trovarne le soluzioni, in particolare, per quanto riguarda il contesto delle scuole di maturità, per alcuni tipi ben identificabili: lineari, quadratiche, polinomiali in alcuni casi particolari, trigonometriche, esponenziali e logaritmiche.

2.1 Calcolo mentale con operazioni elementari

Conoscere le tavole di addizione e di moltiplicazione da 1 a 10 e utilizzarle assieme alle proprietà algebriche elementari per estendere il calcolo a numeri più grandi.

Eseguire semplici calcoli con le frazioni e con i numeri scritti in forma decimale.

Valutare semplici rapporti e percentuali.

Stimare quando un risultato appare come “poco plausibile” o “evidentemente errato”, per esempio a causa di un ordine di grandezza non adeguato.

Esempi

1. Calcola:

a) $11 \cdot 12$

b) $22 \cdot 9$

c) $28 \cdot 32$

d) $(-18) \cdot 6$

e) $(-14) \cdot (-12)$

f) $21 \cdot (-2) \cdot 5$

g) $(-9) \cdot (-8) \cdot (-7)$

h) $(-300) \cdot 1102 \cdot 0$

i) $1 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 1$

j) $120 : 8$

k) $12120 : 12$

l) $(-225) : (-5)$

2. Calcola:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{10} - 0,01$

c) $0,312 + 0,09$

d) 8% di 150

e) 2,5% di 2000

f) $-0,7 + 0,157$

2.2 Calcolo numerico e algebrico

Conoscere le proprietà essenziali dei numeri interi, razionali e reali e impiegarle nello sviluppo e nella semplificazione di espressioni polinomiali, frazionarie e irrazionali, sia numeriche che algebriche. Saper fattorizzare polinomi in casi elementari.

Le proprietà associativa e commutativa di addizione e moltiplicazione, il ruolo degli elementi neutri (additivo 0, moltiplicativo 1), l'elemento assorbente e la proprietà distributiva vengono sovente utilizzati nell'esecuzione di calcoli numerici e costituiscono la base per impostare correttamente un calcolo letterale (algebrico).

Esempi

1. Calcola (senza usare la calcolatrice!):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & 5 + 7 \cdot (-4) & \text{b)} & (5 + 7) \cdot (-4) & \text{c)} & 72 - (14 + 2 \cdot (-6)) \\ \text{d)} & 1 - 2 \cdot (3 + 4 \cdot (5 - 6)) + 7 & \text{e)} & 55 - 14 \cdot (1 - 8 + 7) - 11 \cdot (25 - 4 \cdot 5) \end{array}$$

2. Calcola e semplifica (senza usare la calcolatrice!):

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \frac{2}{3} + \frac{4}{5} & \text{b)} & \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{9} - \frac{4}{27}\right) & \text{c)} & \frac{3}{5} : \left(-\frac{9}{5}\right) & \text{d)} & \left(\frac{7}{9}\right)^2 : \left(-\frac{14}{3}\right)^{-1} \\ \text{e)} & \frac{2}{5} : \left(1 - \frac{2}{3}\right) & \text{f)} & \frac{-5}{\frac{1}{3} + 2} & \text{g)} & \frac{3 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)}{4} & \text{h)} & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^{-2} \end{array}$$

3. Semplifica (senza usare la calcolatrice!):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \sqrt{12} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{20} & \text{b)} & \frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{18}}{\sqrt{15}} \\ \text{c)} & \sqrt[3]{\sqrt{125}} \cdot \sqrt{5} & \text{d)} & 2\sqrt{50} - \sqrt{98} - \sqrt{18} \\ \text{e)} & \sqrt{1 + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{1}{2}} : \sqrt[6]{1 + \frac{1}{4}} & \text{f)} & 5 \cdot \sqrt[3]{81} - 3 \cdot \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{192} \end{array}$$

4. Calcola e scrivi nella forma più semplice. Spiega se vi sono dei valori delle lettere per i quali l'espressione non è definita.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & (3a^2bx)xy^3 & \text{b)} & (-x^2)yx & \text{c)} & \frac{3}{2}ab^2(-6ab) \\ \text{d)} & ax(-1)(-1)^3 & \text{e)} & \frac{3}{4}xy \left(\frac{16}{15}xy^2\right) & \text{f)} & \left(-\frac{1}{3}a^2x\right)^3 x \\ \text{g)} & (-x(-x^{-2}))^{-2} & \text{h)} & \frac{2a^2 - 2ab}{8ab - 8a^2} & \text{i)} & abc \cdot (-bc^2d)^{-1} \\ \text{j)} & \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2} & \text{k)} & \frac{a+b}{ab} + \frac{a+c}{ac} + \frac{b+c}{bc} & \text{l)} & \frac{1}{t} - \frac{t(t+1)}{1+t} + \frac{t^3+3t}{t^2+t} \end{array}$$

5. Quali tra le seguenti scomposizioni in fattori sono corrette?

a) $3x^2 + 10x - 8 = (x + 4)(3x - 2)$ b) $x^3 - 4x = x(x + 2)(x - 2)$

c) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = (x + 1)^2(x + 3)$ d) $x^3 + 9x = x(x - 3)(x + 3)$

6. Scomponi il più possibile il polinomio $p(x)$, utilizzando la messa in evidenza (semplice e doppia) e i prodotti notevoli:

a) $p(x) = 8x^2 + 4x$

b) $p(x) = 3x^3 - 9x^2$

c) $p(x) = 9x^2 - 12x + 4$

d) $p(x) = 3x^2 - 2$

e) $p(x) = 2x^2 + 8x + 8$

f) $p(x) = x^4 + 6x^2 + 9$

g) $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

h) $p(x) = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2$

2.3 Proporzionalità diretta e inversa

In molte applicazioni, ad esempio in geometria o nelle scienze esatte, due grandezze sono legate da *proporzionalità diretta* o *inversa*, relazioni elementari dal punto di vista aritmetico la cui corretta comprensione è irrinunciabile.

Riconoscere le proporzionalità nei problemi (con particolare attenzione alla crescita lineare) anche in ambito geometrico (similitudine) e risolvere i quesiti che le riguardano, in particolare negli ambiti applicativi della chimica e della fisica.

Saper calcolare il valore mancante in una proporzione.

Esempi

1. Trova x :

a) $\frac{x}{8} = \frac{5}{2}$

b) $\frac{10}{x} = \frac{18}{4,5}$

c) $\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$

2. Un supermercato vende lo sciroppo al lampone in bottiglie da 1,5 ℓ (densità dello sciroppo concentrato: 1,20 g/m ℓ). Sull'etichetta si legge che "100 ml di sciroppo concentrato vengono diluiti 1 + 4". La bibita così preparata contiene 1,06 g/m ℓ .

a) Quanti kg di zucchero sono contenuti nella bottiglia venduta? Qual è la concentrazione dello zucchero nello sciroppo concentrato espressa in % m/m?

b) Se 17 g di zucchero sono contenuti in 100 ml di sciroppo, quanti kg di zucchero sono contenuti in 1,5 ℓ ?

- c) Sapendo che la concentrazione limite per l'apprezzabilità del gusto dolce dello zucchero vale 0,5% m/V:
- (i) Quanti g di sciroppo concentrato devo utilizzare per preparare 2 dℓ di una soluzione di cui si percepisce a malapena il gusto dolce? Come faresti operativamente a prepararli?
 - (ii) Quanti g d'acqua bisogna aggiungere a 30 ml di soluzione al lampone preparata secondo la ricetta, per ottenere una soluzione al lampone di cui percepisco a malapena il gusto dolce (la densità di un soluzione con gusto appena percettibile è pari a 1,01 g/ml)? Quanti ml di soluzione senza sapore ottengo? Come procederesti per ottenere questa soluzione partendo dallo sciroppo concentrato?
3. Mentre un veicolo si muove con velocità che varia nel tempo, vengono misurati i valori della velocità media v con cui esso percorre una distanza costante prefissata e dell'intervallo Δt con cui tale distanza viene percorsa. I valori sono riportati nella tabella seguente.

Δt (h)	v (km/h)
0,5	200
1,0	100
1,5	67
2,0	50
2,5	40
3,0	33

- a) Stabilisci se esiste qualche forma di proporzionalità tra le due variabili Δt e v . In caso affermativo, di che proporzionalità si tratta?
- b) Ricava la relazione matematica tra le due variabili.
- c) Stabilisci quanto vale la distanza considerata nelle misurazioni e quale sarebbe la velocità media del veicolo se esso impiegasse 4 ore a percorrerla.

2.4 Potenze e logaritmi

Altra nozione irrinunciabile nelle applicazioni è la *crescita esponenziale*, che contraddistingue molteplici fenomeni in ambito fisico, chimico e biologico e della matematica finanziaria, modellizzata per mezzo delle *funzioni esponenziali*. Le relative inverse, le *funzioni logaritmiche*, rappresentano a loro volta uno strumento indispensabile.

Conoscere le regole del calcolo con le potenze e con i logaritmi, saperle applicare nello sviluppo e nella semplificazione di espressioni formali; conoscere le peculiarità della crescita (rispettivamente decrescita) esponenziale e logaritmica e risolvere semplici problemi relativi a queste ultime.

Esempi

1. Calcola mentalmente:

a) $(4^3 \cdot 4^5) : 4^2$	b) $0^3 \cdot 2^4$	c) $5^3 \cdot 2^3$	d) $4^{-2} \cdot 2^{-7} \cdot 8^3$
e) $\frac{2^{-18}}{2^{-12} \cdot 2}$	f) $\frac{1^{-4} \cdot 2^{-3} \cdot 3^5}{2^{-4} \cdot 3^4}$	g) $(2^5)^2 : (4^3 \cdot 2^4)$	h) $(3^2 \cdot 5^2) : (3 \cdot 5)$
i) $\log_3(81)$	j) $\log_5(1)$	k) $\log_{12}(144)$	l) $\log_7(343)$
m) $\log_{11}\left(\frac{1}{11}\right)$	n) $\log_8\left(\frac{1}{512}\right)$	o) $\log_{13}\left(\frac{1}{169}\right)$	p) $\log_2(8^{12})$

2. Semplifica:

a) $4^3 : (2 \cdot 3^5)$	b) $(6^3 \cdot 3^5) : 2$	c) $(13^5)^3 : 169^2$	d) $(2^3 \cdot 7^3)^3 : 196^2$
e) $50^{100} : 100^{50}$	f) $33^{99} : 99^{33}$	g) $(8 \cdot 1^{12})^5 : (2^5 \cdot 2^{10})$	h) $(16 \cdot 1^{16})^4 : 2^{16}$
i) $\log_2 \left[\left(\frac{1}{4} \right)^\pi \right]$	j) $\log_{10}(100^7)$	k) $\log_{16}(2)$	l) $\log_3(\sqrt{3})$
m) $\log_a(a^2)$	n) $\log_a(\sqrt[3]{a})$	o) $\log_a\left(\sqrt[5]{\frac{1}{a^3}}\right)$	p) $\log_a(\sqrt[5]{a^4})$

3. Determina la base a , sapendo che ...

a) $\log_a(64) = 3$	b) $\log_a(512) = 10$	c) $\log_a(8) = -3$	d) $\log_a(7) = 5$
e) $\log_a(2) = 1$	f) $\log_a(10) = -\frac{1}{2}$	g) $\log_a(5) = 7$	h) $\log_a(\sqrt[3]{4}) = \frac{2}{3}$

4. Calcola (senza usare la calcolatrice!):

a) $\log(100) + \log(10000) + \log(0,001) + \log(1) + \log(5) + \log(2)$
b) $\log_{\frac{1}{2}}(8) + \log_{\frac{1}{2}}(32) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{64}\right) - 3\log_{\frac{1}{2}}(2)$
c) $\ln(e^5) + \ln(5e^{-7}) + \ln\left(\frac{3e^2}{5}\right) - \ln(3)$

5. È più grande 2004^{2004} oppure $8^{(7^6)}$?

6. Un foglio di carta ha lo spessore di 0,1 mm. Supponiamo che sia abbastanza grande per poterlo piegare 8 volte su se stesso. Quale spessore otterremmo?

7. Per proteggere il personale degli ospedali, le radiografie vengono eseguite in locali rivestiti con placche di alluminio. Sapendo che una placca dello spessore di 1 mm assorbe il 75% delle radiazioni, determina quale dev'essere lo spessore delle placche affinché esse assorbano il 99% delle radiazioni.

2.5 Equazioni lineari

Molto spesso, la risoluzione di un problema viene tradotta in una o più relazioni algebriche tra diverse grandezze, di cui almeno una è ignota, dette *equazioni*. Un'equazione è quindi un'uguaglianza dove è presente almeno un'incognita. Le equazioni vengono classificate a seconda di come si presentano le incognite. I principi di equivalenza costituiscono le basi per un corretto procedimento di risoluzione.

Impostare e risolvere equazioni di primo grado ad un'incognita, con particolare attenzione alle applicazioni in fisica e in chimica.

Tradurre in equazione differenti tipologie di problemi.

Esempi

1. Risolvi in \mathbb{R} le seguenti equazioni:

a) $5 - x = 25 + 3x - 4$

b) $x - 19 = 5x + 23$

c) $7x - (5x + 1) = x$

d) $11 - 11(11x - 11) + 111 = 1$

e) $6x - (3 - (2x - 1) - 5) = 11$

f) $(x + 3)(x - 5) = (x - 3)^2$

g) $\frac{x}{4} + \frac{1}{5} = \frac{x}{2} + \frac{x}{6}$

h) $\frac{8x - 3}{8} - \frac{8 + 3x}{3} = 0$

2. Trova il numero che:

a) sottratto da 40 e moltiplicato per due, dà lo stesso risultato che moltiplicato per due e sottrattogli 80;

b) aggiunto a 3 dà la terza parte di se stesso aggiunto a 23;

c) sottrattogli 21 e diviso per 3, dà lo stesso risultato che dividendolo per 6 e sottraendogli 4;

d) aggiunto al quadrato di 7 dà 10 volte se stesso meno 41.

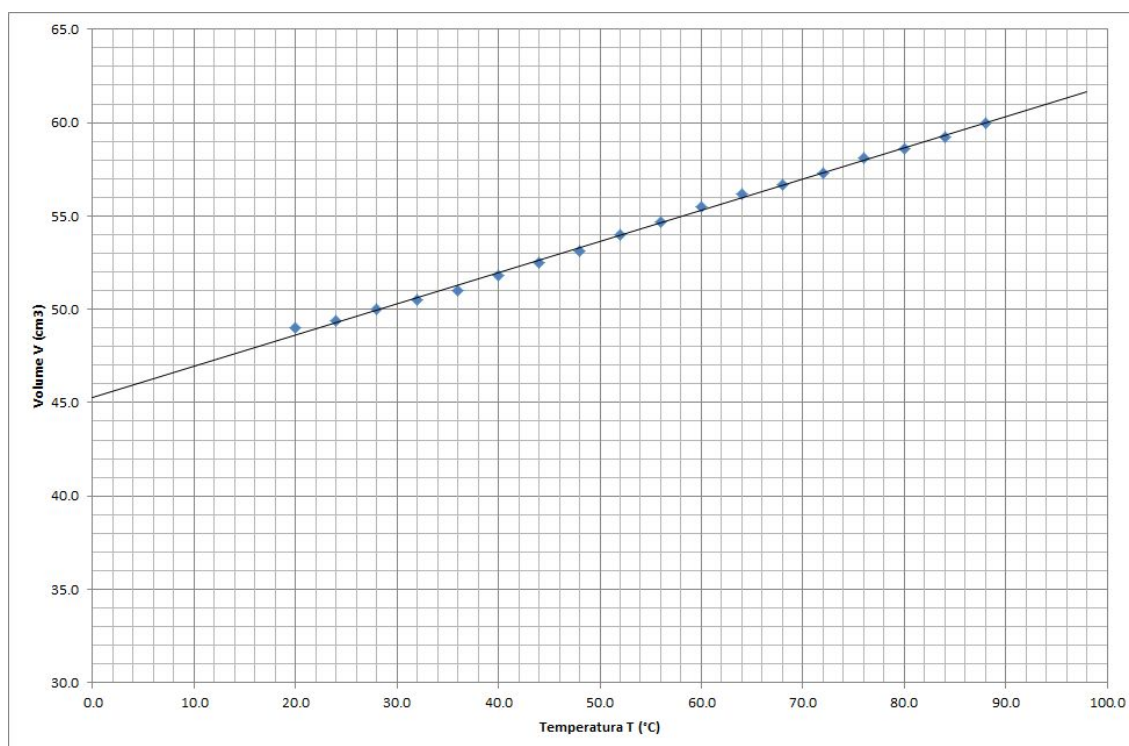
3. Quattro numeri consecutivi, sommati, danno 194. Trovali.

4. Nel campionato italiano di calcio (3 punti per ogni vittoria, 1 per ogni pareggio e 0 per ogni sconfitta) di serie A dopo la 29^a giornata dello scorso campionato l'Udinese aveva 43 punti e 10 sconfitte all'attivo. Determina quanti incontri ha vinto e quanti ne ha pareggiati.

NB: non si doveva recuperare alcun incontro.

5. Manuela ha già deciso cosa regalare a Natale ai suoi amici. Ad ognuno regala una scatola di cioccolatini dal valore di 12,90 franchi, ed a tutti tranne 4 regala anche un peluche del valore di 17,50 franchi. In totale ha speso 203,60 franchi. Quanti regali fa Manuela?

6. L'automobile *A* parte da Milano in direzione di Roma alle 9:30 con una velocità di 120 km/h. Alla stessa ora, l'automobile *B* parte da Piacenza (50 km a sud di Milano), sempre in direzione di Roma, alla velocità di 100 km/h. Roma dista da Milano 650 km.
- Scrivere (utilizzando km e h) le leggi orarie delle due auto.
 - Considerando un sistema di riferimento con l'origine posta a Milano e il verso positivo che va da Milano a Roma, con $t = 0$ all'istante della partenza delle due auto, schizzare un grafico della situazione, calcolando algebricamente l'ora di arrivo delle due auto a Roma.
 - Trovare l'ora e la distanza da Milano in cui l'auto *A* supera l'auto *B*.
 - Come sarebbe stata la legge oraria dell'auto *B*, se fosse partita da Roma in direzione di Milano con la stessa velocità?
7. Il grafico rappresenta la *retta di regressione* (“linea di tendenza”) relativa al riscaldamento di un gas mantenuto a pressione costante.



- Esprimi l'equazione della retta di regressione.
- Quale volume corrisponderebbe ad una temperatura di 10°C? Rispondi graficamente e con il calcolo.

8. Un corpo A cade dall'altezza di 8,50 m. Un corpo B viene lanciato verticalmente verso il basso con velocità iniziale di modulo 3,50 m/s dall'altezza di 12,00 m.
- Quale dei due corpi raggiunge per primo il suolo?
 - Calcola la velocità dei due corpi un istante prima di toccare il suolo.
 - Rappresenta in un unico grafico (t,v) l'andamento delle velocità dei due corpi.
 - Determina in quale istante, durante la caduta, i due corpi sono nella stessa posizione.

Nella risoluzione del problema orienta il sistema di riferimento verso l'alto.

2.6 Equazioni non lineari

2.6.1 Equazioni quadratiche

Risolvere equazioni di secondo grado, sia con la formula risolutiva, sia applicando scomposizioni elementari (trinomio tipico, prodotti notevoli, completamento del quadrato).

Esempi

1. Risolvi, nel modo che ti sembra più opportuno, le seguenti equazioni quadratiche:

a) $2x^2 = 9$

b) $(x - 5)^2 = 16$

c) $x^2 + 2x + 1 = 0$

d) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

e) $x^2 - 13x + 42 = 0$

f) $x^2 - 4x + 7 = 0$

g) $4x^2 + 5x + 6 = 0$

h) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$

i) $\pi x^2 + x - \pi = 0$

j) $\sqrt{2}x^2 + x - \sqrt{2} = 0$

2. Stabilisci quante soluzioni posseggono le seguenti equazioni:

a) $3x^2 - 5x + 7 = 0$

b) $2x^2 + 3x + 5 = 7x^2 + 11x + 13$

c) $x^2 + 2x + 4 = 8x^2 + 16x + 32$

3. L'equazione $4x^2 - 8x + 2d - 1 = 0$ ha una soluzione che è un terzo dell'altra. Calcola d .

2.6.2 Equazioni razionali e radicali

Ricondurre tali equazioni a equazioni lineari, quadratiche o altre equazioni note, prestando particolare attenzione alle condizioni di esistenza.

Esempi

1. Risolvi le seguenti *equazioni fratte*, indicando dapprima l'insieme di definizione dell'equazione (cioè l'insieme nel quale le soluzioni devono trovarsi) e alla fine l'insieme delle soluzioni:

a) $\frac{7}{x-8} = \frac{11}{x-1}$

b) $\frac{1}{4-x} - \frac{1}{2+x} = \frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = \frac{2(x^2+2)}{x^2-1}$

d) $\frac{x+3}{x-1} - \frac{2}{x+2} = \frac{x+8}{x^2+x-2}$

2. Risolvi le seguenti *equazioni irrazionali*, indicando dapprima l'insieme di definizione dell'equazione, poi verificando la validità delle soluzioni trovate e infine scrivendo con chiarezza l'insieme delle soluzioni:

a) $\sqrt{1-x} = 5$

b) $x+1 = \sqrt{2x+5}$

c) $\sqrt{x+5} = \sqrt{4-x}$

d) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2}$

e) $9\sqrt{x} + 7 = 8\sqrt{x} + 9$

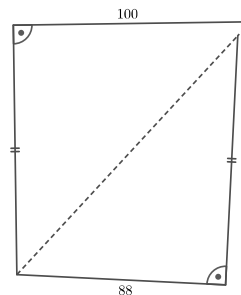
f) $2\sqrt{x^2-x} = 2x+1$

g) $x = \sqrt{128-x^2}$

h) $\sqrt[3]{x-2} = -3$

3. Un turista ha camminato per 4,5 km ad una certa velocità media e, successivamente, per altri 5 km ad una velocità media di 2 km/h inferiore alla precedente. Se avesse percorso l'intera distanza con la velocità media iniziale avrebbe guadagnato 25 minuti. Qual è questa velocità iniziale?
4. Alcuni amici decidono di fare un investimento tutti assieme che frutta loro 1000 franchi. Tranne due, che trovano la proposta rischiosa, tutti decidono per un altro investimento. Questo termina con una perdita di 600 franchi. Noemi, che ha partecipato anche al secondo investimento, ha calcolato che la rinuncia dei suoi due amici le è costata 25 franchi. Da quanti amici è composto il gruppo?
5. Due lati opposti di un quadrato vengono diminuiti della loro radice, mentre gli altri due vengono aumentati di 1.
 - a) Che figura è stata ottenuta?
 - b) È possibile che l'area della nuova figura sia uguale a quella del quadrato?
 - c) Se si determina il lato del quadrato, se no trova quale figura ha area maggiore.

6. Quasimodo ha lasciato in eredità il terreno del disegno seguente, che ha già suddiviso in due parti (linea tratteggiata) per i suoi due figli. Nel documento, però, mancano due misure del terreno che sono indicate essere di uguale lunghezza, mentre le altre sono tutte in metri. Aiuta gli eredi di Quasimodo a trovare la misura mancante per scoprire quanto terreno hanno ereditato.



2.6.3 Equazioni esponenziali e logaritmiche

Ricondurre tali equazioni a equazioni lineari, quadratiche, fratte o altre equazioni note, prestando particolare attenzione alle condizioni di esistenza.

Esempi

1. Risolvi le seguenti equazioni (senza approssimare il risultato):

a) $2^x = 11$	b) $e^x = \pi$	c) $10^{\frac{1}{x}} = 20$
d) $4^{1-x} = 5$	e) $7^{\sqrt{x}} = 3$	f) $5^{3x+1} - 5^{3x-1} = 48$
g) $8 \cdot 3^{-x} = 5$	h) $e^{-\ln x} = 3$	i) $9^x - 2 \cdot 3^x - 11 = 0$

2. La probabilità di sopravvivenza di un cucciolo d'orso polare (fino a 5 anni) è legata alla sua età tramite la relazione $a = \log_{0,7}(0,9 - p) - 1,43$, dove a rappresenta il numero d'anni e p la probabilità di sopravvivenza.

- a) Qual è la probabilità di sopravvivenza di un cucciolo di 2 anni?
 b) Esprimi la probabilità di sopravvivenza in funzione del numero di anni.

3. D'estate il rischio d'infarto negli ultrasessantacinquenni aumenta a causa delle temperature elevate. Si stima che esso sia dello 0,1% a 25° C, e che triplichi ad ogni aumento di 5° C.

- a) Qual è il rischio a 35° C?
 b) A quale temperatura il rischio è del 10%?

4. In un laboratorio di ricerca viene impiegato il radioisotopo ^{24}Na , che ha tempo di dimezzamento pari a 15 ore. L'autorità di controllo ha rilevato un'emissione di radiazioni 100 volte superiore al limite accettabile, e impone la chiusura del laboratorio fino a quando la radioattività non sarà scesa sotto tale limite. Per quanto tempo il laboratorio dovrà restare chiuso?

2.7 Sistemi di equazioni

Un *sistema di equazioni* è costituito da più equazioni che devono essere verificate contemporaneamente. Nel sistema sono di regola presenti più incognite.

Conoscere e utilizzare i vari metodi per risolvere sistemi lineari costituiti da 2 o 3 equazioni: sostituzione, confronto, eliminazione, Cramer.

Scegliere il metodo più efficace a seconda del sistema.

Riconoscere quando un sistema non ha soluzioni o non è determinato (caratterizzare le soluzioni).

Esempi

1. Risolvi i seguenti sistemi:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 2z = 3 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = 9 \\ x + y + 2z = 3 \\ 3x - 12y + 5z = -2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \\ 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

2. Se ai due termini di una frazione si aggiunge 3 si ha la frazione $\frac{8}{9}$, se invece si sottrae 3 si ha $\frac{5}{6}$. Trova la frazione.

3. Dieci anni fa l'età di Mario era $\frac{25}{16}$ dell'età di Luigi. Fra dodici anni l'età di Mario sarà $\frac{4}{3}$ dell'età di Luigi. Trova le due età attuali.

4. Un trapezio rettangolo ha l'angolo acuto di 45° . La differenza fra le basi è 4 cm e la base maggiore è tripla della minore. Calcola area e perimetro e approssima alla seconda cifra decimale.

5. Due ciclisti partono dalla stessa località intervallati di 3 ore. Sapendo che la somma delle loro velocità (che supponiamo costanti) è 50 km/h e che il secondo raggiunge il primo dopo 6 ore di viaggio, determina le velocità dei ciclisti.

2.8 Disequazioni

Una disequazione differisce da un'equazione poiché al posto del segno di uguaglianza (=) è presente uno dei segni $<$ (minore), \leq (minore o uguale), $>$ (maggiore) o \geq (maggiore o uguale). Come le equazioni, anche le disequazioni vengono classificate a seconda di come si presentano le incognite.

L'uso del metodo grafico e l'applicazione della monotonia di funzioni note è molto efficace in numerose situazioni.

Impostare e risolvere disequazioni ad un'incognita di vario tipo.

Esempio

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 5 - x \leq 25 + 3x - 4 & \text{b) } x - 19 > 5x + 23 & \text{c) } \frac{x}{4} + \frac{1}{5} < \frac{x}{2} + \frac{x}{6} \\ \text{d) } 2x^2 \leq 9 & \text{e) } 2x^2 - 4x + 2 \geq 0 & \text{f) } \frac{x^2 - 4x + 3}{x} \leq 0 \\ \text{g) } \sqrt{1-x} \geq 5 & \text{h) } \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4 & \text{i) } 3^{2x+1} > 26 \end{array}$$

3 Geometria

La geometria è un argomento che accompagna lo studente lungo tutto l'arco del suo studio. Il termine *geometria* (dal greco, *misurazione della terra*) indica la parte della matematica che si occupa delle forme nel piano e nello spazio e delle loro mutue relazioni; essa non è però solamente un supporto al calcolo algebrico e una preziosa fonte di applicazioni concrete, ma ha il pregio di offrire l'occasione di studiare strutture astratte, esercitare l'arte della dimostrazione e sviluppare nuovi strumenti di calcolo.

La geometria euclidea permette di studiare un modello logico-deduttivo per approfondire nuove proprietà e dimostrare teoremi di geometria piana; la trigonometria, oltre a generalizzare conoscenze legate alla risoluzione di problemi concreti (risoluzione di un triangolo qualsiasi), ha il pregio di ampliare il bagaglio matematico di nuove funzioni di cui studiare proprietà e grafici; la geometria vettoriale e analitica, oltre a favorire la visione nel piano e nello spazio, dà un nuovo supporto astratto e importanti strumenti di calcolo applicabili anche in fisica.

3.1 Geometria euclidea

La geometria coincide fino al XIX secolo con la geometria euclidea. Questa definisce come concetti primitivi punto, retta e piano (che non vengono quindi definiti), e assume la veridicità di 5 assiomi formulati dal matematico greco Euclide di Alessandria (ca. 365 - 275 a.C.) nei suoi *Elementi*. La scelta dei concetti primitivi e degli assiomi è motivata dal desiderio di rappresentare la realtà in cui viviamo, e in particolare gli oggetti nel piano e nello spazio. I teoremi più complessi fornirono sin dall'antichità degli strumenti utili per l'architettura, la geografia, la navigazione e l'astronomia.

3.1.1 Angoli e poligoni di n lati

Saper studiare proprietà concernenti angoli⁴ e poligoni di n lati ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$) procedendo per triangolazione.

Una *triangolazione* di un poligono di n lati permette di dimostrare alcune sue proprietà facendo riferimento a proprietà note di triangoli. Questo procedimento permette all'allievo di generalizzare le sue conoscenze relative ai triangoli e di sviluppare le sue capacità di astrazione.

Esempi

1. Dimostra che la somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$) vale $(n - 2) \cdot 180^\circ$.
2. Dimostra che un triangolo inscritto in una semicirconferenza e avente un lato sul diametro è rettangolo.

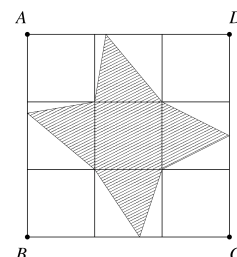
⁴Per scorrevolezza di linguaggio si scrive a volte *angolo* anche per indicare la sua ampiezza

3.1.2 Area del triangolo

Saper risolvere problemi sull'area scomponendo poligoni in modo opportuno.

Facendo riferimento alla formula dell'area di un triangolo, l'allievo ha l'occasione di risolvere problemi più elaborati, dimostrando in particolare di aver capito a fondo il concetto di altezza di un triangolo.

Esempio: nella figura a lato, il quadrato $ABCD$ è diviso in 9 quadratini tutti uguali tra loro. Calcola il rapporto tra l'area del quadrato $ABCD$ e l'area tratteggiata.



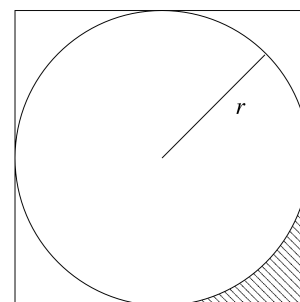
3.1.3 Circonferenza e cerchio

Conoscere le formule relative a circonferenza e cerchio e saperle applicare a problemi geometrici elementari (ad es. relativi a settori e segmenti circolari).

Nella storia, la conoscenza del numero noto come *pi greco* (indicato con π) e di una formula per il perimetro e per l'area del cerchio hanno sempre destato nella mente umana un fascino particolare. L'allievo potrà vedere una dimostrazione delle formule ad esempio nell'ambito del calcolo integrale. In questa sezione l'allievo dovrebbe dimostrare di conoscere e padroneggiare le formule, comprendere alcune situazioni geometriche ed esercitare le tecniche di calcolo algebrico.

Esempio: è data una circonferenza di raggio r inscritta in un quadrato, come mostrato nella figura a lato.

- Calcola l'area della parte tratteggiata, in funzione di r .
- Per $r = 2$ cm, quanto misura tale area?
- Calcola il rapporto tra l'area del cerchio e l'area del quadrato e il rapporto tra la circonferenza di raggio r e il perimetro del quadrato.
- Tali rapporti dipendono dal valore di r ?



3.1.4 Volumi di solidi elementari

Saper risolvere problemi sul volume di un solido utilizzando opportune scomposizioni; saper calcolare il volume di una sfera.

Per risolvere questo tipo di problemi è essenziale che l'allievo sviluppi una buona visione tridimensionale delle situazioni presentate. Le formule e le tecniche di calcolo permettono in seguito di tradurre matematicamente l'immagine e di trovarne una soluzione.

Esempi

1. Sia $ABCD$ un trapezio rettangolo con lato obliquo AB di lunghezza 15 cm, base maggiore AD di 40 cm e diagonale maggiore AC lunga 41 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido generato dalla rotazione del triangolo ABC attorno alla retta passante per A e D .
2. Sia S la superficie di una sfera. Si costruisce una seconda sfera raddoppiando la superficie della sfera precedente. Quanto vale il rapporto fra il volume della seconda sfera e quello della prima sfera?

3.1.5 Similitudine

Saper risolvere semplici problemi riconducibili alla similitudine di triangoli e al Teorema di Talete.

L'idea di calcolare rapporti fra lati viene attribuita a Talete di Mileto (ca. 640 - 547 a.C.), filosofo e astronomo che predisse per la prima volta nella storia un'eclissi solare. Secondo il *folklore* matematico, nel corso di un viaggio in Egitto calcolò l'altezza della Piramide di Cheope confrontandone l'ombra con quella di un paletto, cambiando il corso della storia e del pensiero matematico.

Esempi

1. Se le misure dei lati di un triangolo raddoppiano, di quanto aumenta il suo perimetro? E la sua area? E cosa accade triplicando le misure dei suoi lati? O, più in generale, moltiplicando per un fattore k reale le misure dei suoi lati, con $k > 0$?
2. Si narra che Talete, in uno dei suoi numerosi viaggi, sbarcò in Egitto e riuscì a calcolare l'altezza della Piramide di Cheope con l'aiuto di un paletto (di altezza conosciuta, posto parallelamente all'asse della piramide) e dell'ombra della piramide e del paletto misurate sulla sabbia. Per convincere il Faraone della veridicità delle sue affermazioni, Talete prese un bastone e sulla sabbia tracciò un triangolo e una retta parallela a uno dei suoi lati e... Spiega tu la sua idea!

3.1.6 Teorema di Pitagora

Conoscere l'enunciato nella sua forma più generale, saperlo riscrivere nella forma più opportuna e saperlo applicare alla risoluzione di problemi geometrici elementari.

Il teorema di Pitagora (ca. 580 - 495 a.C.), di fondamentale importanza nella storia della matematica, esprime una relazione fra i lati di un triangolo rettangolo. L'allievo deve mostrare di averne capito il significato geometrico e di saperla utilizzare correttamente nelle situazioni proposte.

Esempi

1. In un triangolo rettangolo, l'ipotenusa misura 12 cm e un cateto misura 7 cm. Calcola la sua area.
2. È dato un triangolo rettangolo di area 96 cm^2 . Un cateto misura 12 cm. Calcola la lunghezza dell'ipotenusa.
3. Calcola la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo in cui i cateti misurano 20 cm e 30 cm.

3.2 Trigonometria e goniometria

La trigonometria (dal greco, *misura dei triangoli*) stabilisce relazioni tra grandezze angolari e grandezze lineari. I primi rudimenti di trigonometria nascono già nell'antichità per studiare fenomeni naturali, astronomici e problemi architettonici. In seguito, grazie allo sviluppo dell'algebra (dalla fine del 1500 in poi), le scoperte di trigonometria fatte in epoche diverse furono unificate e formalizzate.

3.2.1 Misura degli angoli

Saper esprimere ampiezze in gradi sessagesimali e radianti, passando da un'unità all'altra, nonché saper calcolare lunghezze di archi e aree di settori circolari.

Nel linguaggio comune, l'ampiezza di un angolo viene quasi sempre espressa nella notazione sessagesimale, un sistema sorto nella matematica babilonese e basato sulla suddivisione dell'angolo giro in 360 parti uguali (corrispondente ai circa 360 giorni impiegati dal sole a percorrere l'intera volta celeste), ma questa scelta è arbitraria e non è unica. Fu l'avvento del calcolo infinitesimale a motivare l'introduzione di un angolo di riferimento più naturale per la misura dell'ampiezza di un angolo, il radiante.

Esempi

1. Rappresenta degli angoli con le seguenti ampiezze:
a) 180° b) $2\pi^{\text{rad}}$ c) $\frac{7}{2}\pi^{\text{rad}}$ d) 2^{rad} .
2. Durante una gara di pattinaggio artistico un'atleta compie 10 giri su se stessa a braccia larghe. Se le punte delle sue dita distano 1 metro dall'asse di rotazione, quanta strada hanno percorso?
3. Il miglio marino rappresenta la lunghezza dell'arco di un cerchio massimo corrispondente ad un angolo di $1'$ (un primo) al centro della Terra. Calcola il suo valore in metri, sapendo che la misura del raggio terrestre è di circa 6371 km.

3.2.2 Rapporti trigonometrici

Conoscere le definizioni di seno, coseno e tangente nel triangolo rettangolo; saperle impiegare, con l'ausilio di una calcolatrice scientifica, nella risoluzione di problemi geometrici elementari.

Dal teorema di Talete segue facilmente che i rapporti fra i lati in triangoli simili dipendono unicamente dalla congruenza di un loro angolo α ; per questo motivo, nel caso di triangoli rettangoli, alcuni tra essi vengono indicati convenzionalmente con $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$. In alcuni casi particolari (ad esempio per $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$) tali *rapporti trigonometrici* possono essere calcolati in modo esatto, mentre per altri è necessario usare una calcolatrice scientifica. I rapporti trigonometrici permettono di *risolvere* un triangolo rettangolo, ossia di trovare le misure dei suoi lati e l'ampiezza dei suoi angoli a partire dalla conoscenza di almeno 3 dati (fra cui l'angolo retto e la lunghezza di almeno un lato).

Esempi

1. Determina la misura del perimetro di un rettangolo sapendo che la diagonale misura 10 cm e forma con un lato un angolo di $37^\circ 35'$.
2. Martino è un appassionato di ciclismo e ha deciso di percorrere in bicicletta una strada della lunghezza di 500 m con un dislivello di 100 m.
 - a) Quanto misura l'angolo d'inclinazione della strada rispetto all'orizzontale?
 - b) Se, percorrendo una strada della stessa lunghezza, il dislivello raddoppia, l'angolo d'inclinazione rispetto all'orizzontale raddoppia?
2. Mentre sta guidando, Tobia osserva una cartello stradale che indica che sta percorrendo una strada con una pendenza del 7%. Determina l'angolo tra il profilo di tale strada e l'orizzontale.
3. Filippo vuole costruire un aquilone a forma di rombo con diagonali che misurano 3 cm e 7 cm. Determina la lunghezza dei lati e l'ampiezza degli angoli interni del rombo.
4. Per determinare la larghezza di un fiume (rettilineo) si misura lungo una sponda un segmento AB e sull'altra si fissa un punto C qualsiasi. Nei punti A e B si misurano gli angoli $\alpha = \widehat{BAC}$ e $\beta = \widehat{ABC}$. Determina la larghezza del fiume se AB è lungo 116,3 m, $\alpha = 68,88^\circ$ e $\beta = 71,11^\circ$.
5. Su un palazzo viene posta un'antenna alta h metri. Determina l'altezza H del palazzo (antenna esclusa) sapendo che un osservatore vede dal suolo la cima dell'antenna con un angolo di elevazione α e la cima del palazzo con un angolo di elevazione β .

3.2.3 Funzioni goniometriche

Conoscere le definizioni delle funzioni seno, coseno e tangente nella circonferenza goniometrica, saperne tracciare i grafici ed averne presenti alcune applicazioni (ad es. nella fisica).

Il grafico di una funzione permette di capire al meglio alcune sue proprietà, fra cui la periodicità e le condizioni di invertibilità, nonché di illustrare un fenomeno fisico.

Esempi

1. Disegna il grafico di $f(x) = \sin(2x)$ e utilizzalo per risolvere graficamente la disequazione $\sin(2x) \leq \frac{1}{2}$.
2. Disegna il grafico della funzione $y = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$, a partire dal grafico di $y = \sin(x)$, descrivendo le trasformazioni geometriche avvenute.

3.2.4 Relazioni goniometriche

Saper interpretare sulla circonferenza goniometrica alcune identità fondamentali tra le funzioni goniometriche (Teorema di Pitagora in forma goniometrica, periodicità, relazioni per angoli opposti, complementari e supplementari) e applicarle nella semplificazione di semplici espressioni.

Alcune identità tra le funzioni goniometriche hanno il pregio di poter essere illustrate, comprese e dimostrate geometricamente: è il caso della nota relazione $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, di $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ e delle molteplici relazioni fra angoli opposti, complementari e supplementari. Tali formule permettono poi di semplificare espressioni e di risolvere equazioni.

Esempi

1. Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\tan(\frac{\pi}{4}) \cdot \sin(\pi + \alpha) + 5 \sin(\alpha) - 2 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + 2 \sin(-\alpha)$

b) $\sin(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ) + \cos(90^\circ) \cdot \tan(25^\circ) + \cos(0^\circ) \cdot \cos(90^\circ + \alpha) - \sin(-\alpha)$

c) $\sin^2(77^\circ) + \cos(37^\circ) \cdot (1 - \tan(1305^\circ)) + \cos^2(77^\circ) + \cos(1125^\circ)$

2. Risolvi le seguenti equazioni goniometriche:

a) $\cos(x) = -1$

b) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

c) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\tan(x) = -3$

e) $\sin(2x) = \frac{3}{4}$

f) $\cos(3x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$

g) $\sin(x + 47^\circ) = 2$

3.3 Geometria vettoriale e analitica

La geometria analitica e la geometria vettoriale rappresentano importanti svolte nella storia della matematica. Nel corso del XVII secolo, Cartesio (ossia René Descartes, 1596 - 1650) e Pierre de Fermat (1601 - 1665), introducendo un sistema di riferimento nel piano e nello spazio tridimensionale, indussero un cambiamento epocale nei metodi della geometria, che sarà determinante non soltanto ai fini dell'evoluzione di questa disciplina, ma anche per il successivo sviluppo del calcolo infinitesimale. Due secoli più tardi, fu soprattutto grazie all'opera di Giusto Bellavitis (1803 - 1880), William Rowan Hamilton (1805 - 1865) e Hermann Grassmann (1809 - 1877) che il concetto di *vettore* acquisì un'importanza centrale in vari ambiti della matematica pura e applicata.

3.3.1 Geometria vettoriale

Conoscere i concetti di vettore e di combinazione lineare e saper applicare e interpretare geometricamente le proprietà essenziali del calcolo vettoriale, con particolare attenzione alle applicazioni fisiche.

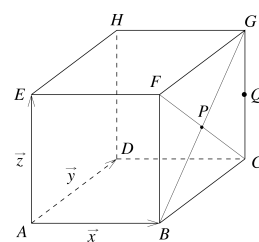
I contenuti della geometria vettoriale sono concetti astratti che hanno il pregio di avere esempi ben visualizzabili geometricamente (vettori geometrici nel piano e nello spazio) e applicazioni in ambito fisico (*vettore forza, spostamento, velocità, accelerazione*).

Esempi

1. Scrivi il vettore \vec{c} come combinazione lineare di \vec{a} e \vec{b} , verificando sia algebricamente che graficamente il risultato ottenuto.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} & \text{d) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Nel cubo rappresentato a destra, P è il centro della faccia $B CG F$ e Q è il punto medio dello spigolo CG . Esprimi come combinazione lineare dei vettori $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{z} = \overrightarrow{AE}$ i vettori \overrightarrow{HB} , \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{BP} , \overrightarrow{HP} , \overrightarrow{FQ} , \overrightarrow{EQ} , \overrightarrow{AQ} , \overrightarrow{HQ} .



3. Scrivi il vettore \vec{d} come combinazione lineare di \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} :

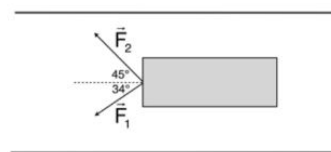
$$\begin{array}{ll} \text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 12 \end{pmatrix} & \\ \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ -20 \end{pmatrix} & \end{array}$$

4. Un aereo si muove in direzione NO a 125 km/h a causa di un vento proveniente da Ovest con la velocità di 50 km/h. A quale velocità ed in quale direzione si muoverebbe l'aereo se non ci fosse il vento? Risolvi l'esercizio sia geometricamente sia algebricamente.

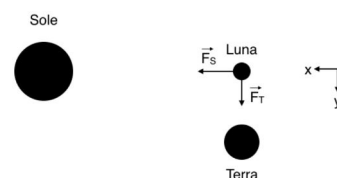
5. Calcola il prodotto scalare e l'angolo tra i vettori $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

6. Calcola il prodotto scalare e l'angolo tra i vettori $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

7. Due membri dell'equipaggio di una chiatta trainano l'imbarcazione lungo un canale. Il primo applica una forza di 130 N con un angolo di 34° . Il secondo, dalla riva opposta, trascina con un angolo di 45° (vedi illustrazione). Quale forza deve applicare quest'ultimo in modo tale che la chiatta si muova in direzione del canale?



8. Quando la Luna inizia il suo terzo quarto, essa forma, con Terra e Sole, un triangolo rettangolo in cui essa si trova nel vertice corrispondente all'angolo retto. Determina intensità, direzione e verso della forza risultante esercitata sulla Luna. Indica inoltre la direzione di tale forza rispetto alla congiungente Luna - Sole.



9. Considera la disposizione illustrata nella figura. Determina la forza risultante sul punto di carica q_C posto nel punto C rappresentandola come una freccia nella figura. I dati relativi alle cariche sono i seguenti: $q_A = 1,5 \cdot 10^{-3}C$, $q_B = -0,5 \cdot 10^{-3}C$, $q_C = 0,2 \cdot 10^{-3}C$, $\overline{AC} = 1,2m$, $\overline{BC} = 0,5m$.



3.3.2 Geometria analitica: distanze, ampiezze, aree, volumi

Saper identificare un punto tramite le sue coordinate; saper risolvere problemi elementari nel piano e nello spazio.

In un sistema di coordinate, ogni punto del piano, rispettivamente dello spazio, può essere identificato con una coppia, rispettivamente una terna, di numeri reali. Il bagaglio di conoscenze acquisite nel capitolo di trigonometria permette di calcolare distanze fra punti e ampiezze di angoli di poligoni nel piano. Inoltre, alcuni sottoinsiemi del piano e dello spazio come rette, circonferenze, piani e sfere possono essere descritti, a partire da una loro caratterizzazione geometrica, con equazioni cartesiane, e quindi analizzati nelle loro intersezioni e posizioni reciproche.

Esempi

1. Determina la misura dei lati, l'ampiezza degli angoli, il perimetro e l'area del triangolo ABC con $A(2,1)$, $B(5,4)$, $C(-5,3)$.
2. Partendo dall'origine degli assi cartesiani, mi sposto di 5 unità verso il punto $A(12,16)$. In seguito proseguo per 3 unità nella direzione dell'asse delle ascisse (in senso positivo) e di 10 unità verso il punto $B(0,20)$. Dove mi trovo?
3. Calcola l'area, il perimetro e l'ampiezza degli angoli interni del triangolo ABC , con
 - a) $A(7, -3,1)$, $B(2,0,5)$, $C(9, -3,1)$
 - b) $A(5,2, -8)$, $B(7,8,13)$, $C(11,8,11)$
4. Calcola il volume e l'altezza relativa alla faccia ABC del tetraedro $ABCD$, con
 - a) $A(5, -2,1)$, $B(7,4,3)$, $C(-6,1,0)$, $D(3,1,4)$
 - b) $A(0,4,0)$, $B(21,7,0)$, $C(-5,0,13)$, $D(7,2, -3)$
5. Amélie ha progettato una tenda da campeggio a forma di tetraedro, con le estremità nei punti $A(0,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(3,2,0)$ e $D(1,2,2)$ (le coordinate sono in metri). Determina:
 - a) la superficie di tela di cui ha bisogno.
 - b) il volume della tenda quando è montata.

3.3.3 La retta nel piano e nello spazio

Conoscere e distinguere le rappresentazioni algebriche di una retta, avendo in particolare presenti le peculiarità delle descrizioni cartesiana e parametrica.

Esempi

1. Scrivi un'equazione cartesiana e un'equazione parametrica della retta...
 - a) ... passante per $A(3,5)$ e il cui vettore direttore sia $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - b) ... passante per $A(-3, -2)$ e $B(4, -5)$.
 - c) ... passante per $A(2, -4)$ e avente pendenza $m = -\frac{3}{4}$.
 - d) ... passante per $A(5,2)$ e parallela al segmento BC , con $B(1,1)$ e $C(-3,2)$.
 - e) ... passante per $A(0, -2)$ e parallela all'asse Ox .
 - f) ... passante per $B(8,12)$ e parallela all'asse Oy .
 - g) ... passante per $C(-4,5)$ e perpendicolare alla retta trovata in **c**).

2. Determina un'equazione parametrica della retta...
- a) ... passante per $P(2,5,7)$ e avente $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ quale vettore direttore.
 - b) ...passante per $P(-1,5,\frac{3}{2})$ e $Q(\frac{1}{2},\frac{1}{4},3)$.
 - c) ...passante per $P(1,1,1)$ e parallela alla retta trovata in **b**).
 - d) ...passante per $P(11,12,13)$ e parallela all'asse Oz .
 - e) I punti $A(-4,8,16)$ e $B(-6,9,11)$ giacciono sulla retta trovata in **a**)?
3. Mattia sta giocando a bowling con degli amici. Dopo il primo lancio gli è rimasto in piedi un solo birillo, proprio nell'angolo della pista (il numero 10), ossia a 19,16 metri dalla linea di lancio ed a 0,52 metri dal centro della pista. Il suo secondo lancio parte dal centro della corsia con una deviazione di 6 cm ogni 275 cm rispetto alla linea centrale della pista e verso il lato sul quale si trova il birillo. Trova a che distanza la palla passerà dal centro del birillo (se è inferiore a 8 cm lo abatterà).

4 Analisi

L'*analisi matematica*, sviluppata a partire dalla seconda metà del XVII secolo grazie agli sforzi indipendenti di Isaac Newton (1643 - 1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716), rappresenta in un certo senso il coronamento della matematica liceale. In sintesi, essa potrebbe essere descritta come lo studio delle *quantità variabili*; le sue applicazioni tradizionali si riferiscono in particolare alle scienze sperimentali (che ne hanno motivata l'introduzione), ma non va certamente sottovalutato il suo ruolo in ambito stocastico ed economico.

Nell'analisi confluiscono molti dei metodi sviluppati nei primi anni del percorso liceale. In particolare, il *calcolo infinitesimale* e il *calcolo dei limiti* richiamano da un lato tutta una serie di nozioni relative al concetto di *funzione*, dall'altro le tecniche algebriche affinate già a partire dalla Scuola media.

4.1 Generalità sulle funzioni reali

Parallelamente alla nozione di *numero reale*, che può essere resa in modo abbastanza intuitivo, il concetto più importante nell'analisi matematica è quello di *funzione reale*, intesa come relazione univoca tra numeri reali, e pertanto utile a rappresentare relazioni tra grandezze in ambito scientifico o economico. Sarà pertanto di fondamentale importanza saper manipolare algebricamente l'espressione di una funzione, così come saperne riconoscere le proprietà a partire dalla sua rappresentazione grafica.

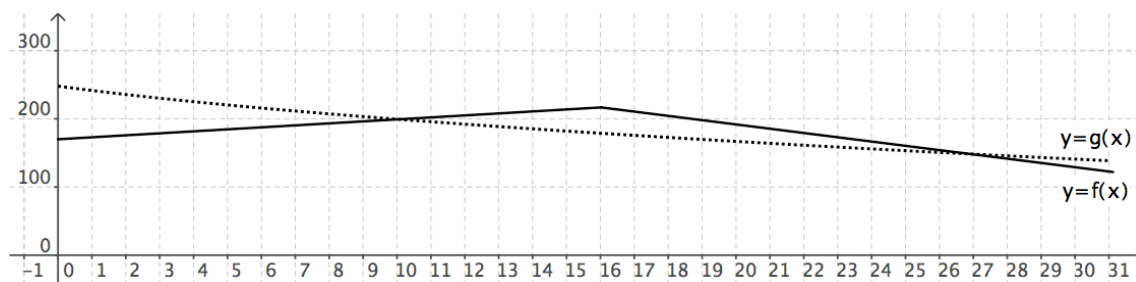
4.1.1 Grafici

Saper ricavare il grafico di una semplice funzione, rispettivamente saper interpretare graficamente le peculiarità di una funzione reale.

La rappresentazione di una funzione reale nel *piano cartesiano* permette di visualizzarne a colpo d'occhio le proprietà essenziali, quali la *monotonia*, la *concavità* o i *punti di discontinuità*. Sarà pertanto indispensabile, oltre a saper disegnare con una certa sicurezza i grafici delle funzioni più elementari, da un lato saper "leggere" tali proprietà da un grafico e dall'altro disporre di un buon numero di esempi anche molto concreti dove esse rispecchiano fenomeni facilmente identificabili.

Esempi

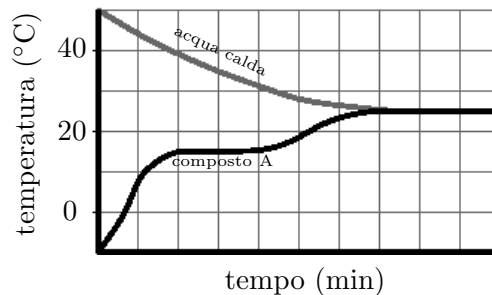
1. I grafici delle funzioni f (linea continua) e g (linea tratteggiata) rappresentano l'andamento del prezzo di 2 carburanti (chiamiamoli *Effe* e *Gi*) nel corso di un mese (l'intervallo $[n - 1, n]$ rappresenta il giorno n : ad es. $[0, 1]$ rappresenta il 1° giorno).



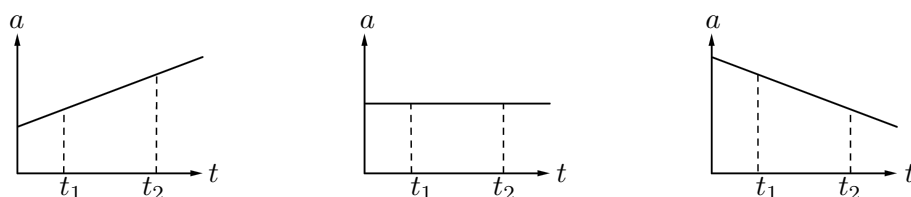
Aiutandoti con il grafico, rispondi alle seguenti domande:

- In che momento i carburanti raggiungono il prezzo massimo?
 - In che momenti i carburanti hanno lo stesso prezzo?
 - In che intervalli di tempo *Gi* è più caro di *Effe*?
2. Un solido (composto A) viene riscaldato a bagnomaria (bagno di acqua calda). Con l'aiuto del grafico, nel quale sono riportati i valori delle temperature del composto e dell'acqua durante un certo intervallo di tempo, determina:

- la temperatura iniziale del bagnomaria.
- la temperatura di fusione del solido. Come varia la temperatura durante il passaggio di stato?
- la temperatura del bagnomaria al termine dell'esperimento.
- la temperatura di ebollizione del composto A.

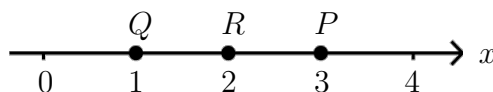


3. Osserva i tre grafici seguenti, che rappresentano l'accelerazione di un corpo in funzione del tempo. Si sa che il corpo si muove nel tempo con velocità positiva diversa da zero e che la sua velocità aumenta per l'intero intervallo di tempo tra t_1 e t_2 .

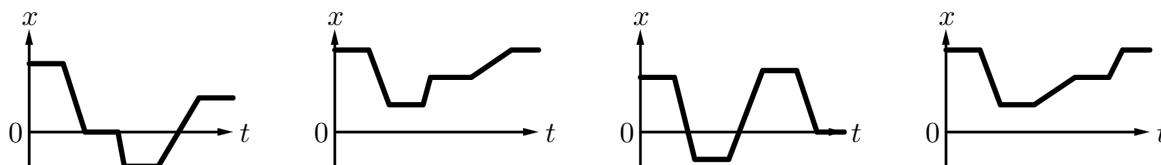


Quale o quali dei tre grafici precedenti sono compatibili con quello che si sa del moto dell'oggetto? Motiva la tua risposta.

4. Una persona si trova nel punto P del sistema di riferimento rappresentato di seguito.



Vi sosta per un po', e quindi si muove in linea retta fino al punto Q , dove sta ferma per qualche istante. Poi corre rapidamente fino a R , vi si ferma per un po' e torna in P camminando lentamente. Quale dei quattro seguenti grafici rappresenta correttamente la sequenza dei movimenti?



4.1.2 Composizione e inversa

Saper calcolare la *composizione di funzioni* e, viceversa, scrivere una data funzione come *composizione di funzioni elementari*; saper determinare algebricamente l'*inversa di una funzione*.

Le cosiddette *funzioni elementari* vengono descritte algebricamente per mezzo di operazioni elementari tra una famiglia relativamente ristretta di funzioni fondamentali. Il calcolo infinitesimale si basa da un lato sulla conoscenza delle proprietà di tali funzioni, dall'altro sul comportamento delle operazioni di *derivazione*, di *integrazione* e di *passaggio al limite* rispetto alle "quattro operazioni" e alla *composizione di funzioni*, introdotta già a partire dal primo anno del liceo. Ugualmente importante è la nozione di *funzione inversa*, che assume un ruolo centrale nella risoluzione di equazioni e disequazioni.

Esempi

1. In Europa la temperatura si misura coi gradi Celsius ($^{\circ}\text{C}$), mentre negli Stati Uniti si usano i gradi Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) ed infine gli scienziati preferiscono i kelvin (K). Ecco, ad esempio, la funzione che permette di convertire i gradi Fahrenheit in kelvin:

$$k(f) = \frac{6895 + 15f}{27} .$$

- a) Ricordando che a 0°C corrispondono 32°F , e che a 100°C corrispondono 212°F , ricava le formule per convertire gradi Celsius in Fahrenheit e viceversa.
- b) Verifica, componendo le due funzioni, che vale

$$k(c) = c + 273,15 .$$

- c) Determina la formula per convertire i kelvin in gradi Fahrenheit.

2. Sono date le funzioni reali

$$f : x \mapsto y = 2x + 1$$

$$g : x \mapsto y = \frac{x + 3}{x - 2}$$

$$h : x \mapsto y = x^2 - 1$$

$$k : x \mapsto y = 3x^2 - 2x - 1$$

$$\ell : x \mapsto y = \frac{x + 1}{x}$$

$$m : x \mapsto y = \sqrt{x}$$

$$n : x \mapsto y = 1 + \sin(2\pi x)$$

$$p : x \mapsto y = 10^{-x}$$

- a) Rappresenta graficamente le funzioni.
- b) Aiutandoti con il grafico, determina quali sono iniettive, e di esse determina l'inversa.
- c) Determina l'equazione delle funzioni

$$f \circ g , g \circ f , f \circ h , h \circ f , h \circ m , m \circ h .$$

3. Scrivi le seguenti funzioni come *composizioni* di funzioni *affini*, *potenza*, *trigonometriche* ed *esponenziali*:

$$\text{a) } y = \sin(3x + 1) \quad \text{b) } y = \cos^2(1 - x) \quad \text{c) } y = \sqrt{3x^2 - 1} \quad \text{d) } y = (3e^{2x} - 1)^2$$

4.2 Proprietà delle funzioni elementari

Conoscere e saper interpretare graficamente le proprietà essenziali delle funzioni polinomiali, potenza, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche e trigonometriche inverse.

Come abbiamo già menzionato sopra, le “funzioni elementari” studiate nella matematica liceale vengono costruite a partire da una famiglia di funzioni fondamentali, di cui sarà opportuno conoscere a priori alcune peculiarità.

Esempi: associa ad ognuna delle funzioni date il grafico corrispondente:

a) $y = -\frac{1}{2}x^2$

b) $y = \left(\frac{4}{5}\right)^x$

c) $y = x^2 - 2x$

d) $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$

e) $y = \frac{1}{10}x^3 - \frac{31}{10}x + 3$

f) $y = 3x + 1$

g) $y = e^x$

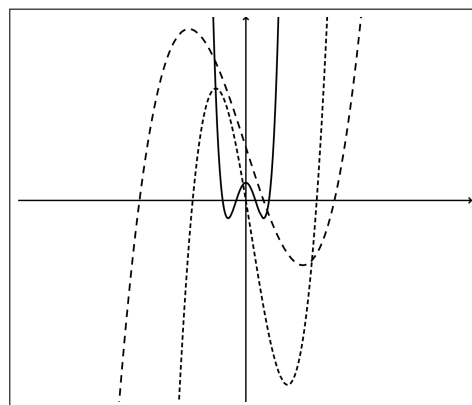
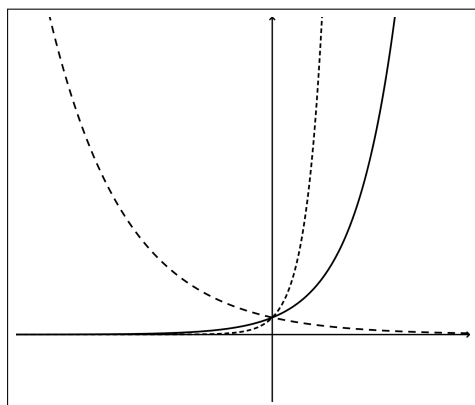
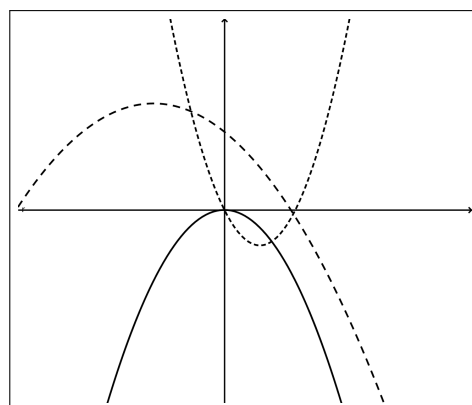
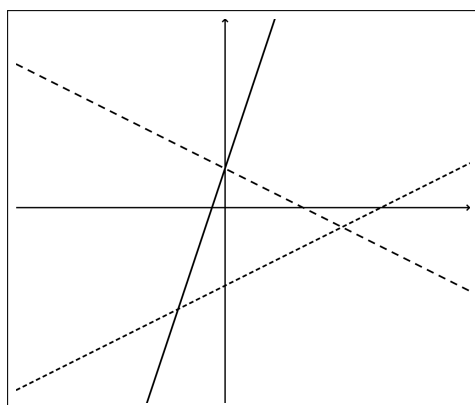
h) $y = -\frac{1}{2}x + 1$

i) $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$

j) $y = \frac{1}{2}x - 2$

k) $y = -\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{11}{5}$

l) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

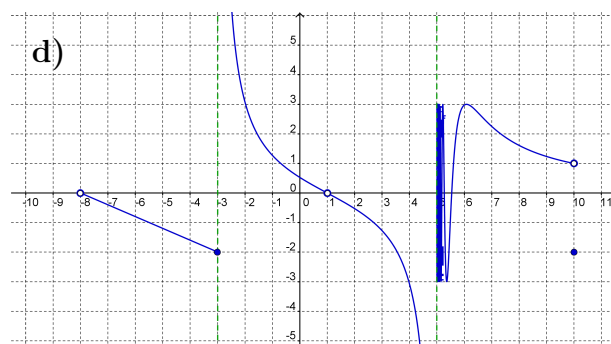
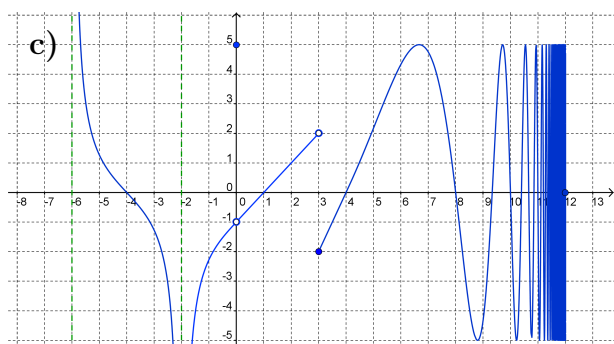
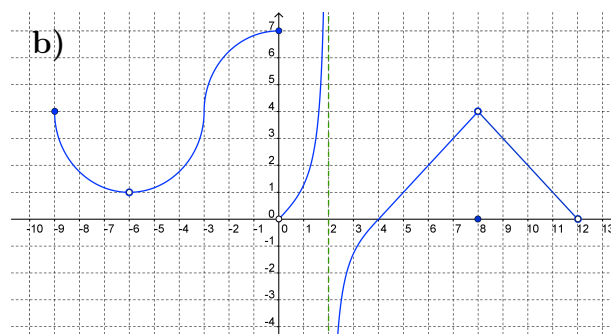
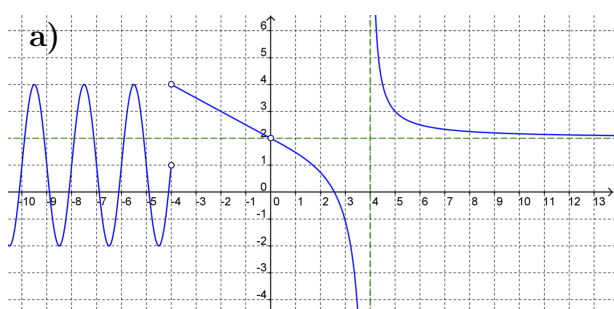


4.3 Limiti

Comprendere a livello intuitivo le nozioni di *limite* e di *funzione continua*.

Il concetto di *limite*, introdotto a partire dai primi decenni del XIX secolo per dare un fondamento rigoroso all'analisi, ne rappresenta la nozione centrale. Nell'ottica delle "competenze di base" non si ritiene opportuna una trattazione dettagliata della sua definizione più formale ("definizione ε - δ "), ma sarà opportuno acquisirne una comprensione intuitiva sulla scorta di alcuni esempi illuminanti.

Esempi: determina, se esistono, i limiti per $x \rightarrow \pm\infty$ e nei *punti di discontinuità* delle funzioni rappresentate e indica in essi, sempre se esiste, il valore di $f(x)$:



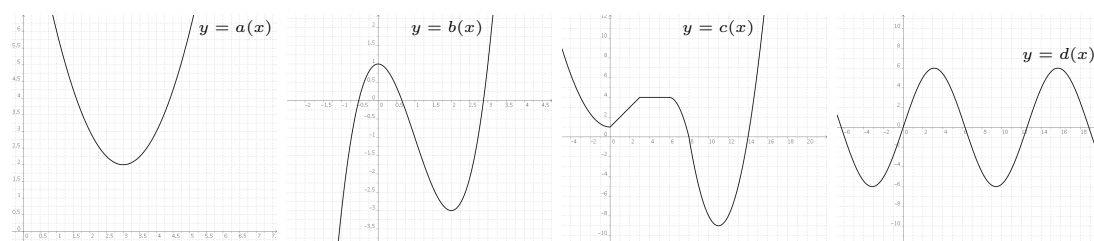
4.4 Calcolo differenziale

4.4.1 Rapporti incrementali e derivate

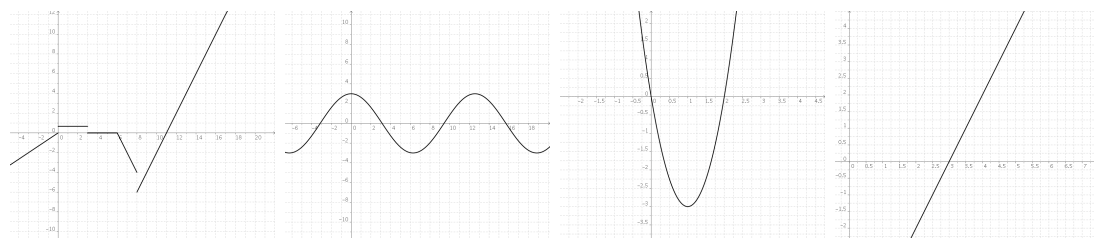
Conoscere la *definizione formale di derivata*, e saperla interpretare graficamente.

La definizione di *derivata*, comprensibile anche a partire da una nozione intuitiva del concetto di *limite*, rappresenta un caposaldo del calcolo infinitesimale. Facendo leva sulle applicazioni fisiche, essa può facilmente venir compresa come *variazione istantanea* per mezzo delle nozioni di *velocità* e *accelerazione*.

Esempi: sono date le seguenti funzioni:



Riconosci tra i seguenti i grafici delle rispettive *funzioni derivate* a' , b' , c' , d' :



4.4.2 Regole di derivazione

Saper derivare una data funzione utilizzando le regole della linearità, del prodotto, del quoziente e della composizione.

Le tecniche del *calcolo differenziale* rappresentano da un lato un'utile palestra per esercitare tutta una serie di competenze di carattere meccanico, dall'altro, come vedremo, la via per acquisire informazioni a proposito di una funzione reale. Sarà quindi indispensabile conoscerle ed esercitarle a dovere.

Esempi: calcola la derivata della funzione $y = f(x)$:

a) $y = -\frac{2}{3}x^3 + x$

b) $y = \ln(x) - x^{-2}$

c) $y = e^{-x}$

d) $y = \sin^2(x)$

e) $y = x^2 \cdot \ln(x)$

f) $y = \sin(x) \cdot e^x$

g) $y = \frac{x+5}{1-x}$

h) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

i) $y = (2x^3 - x^2)^{-2}$

j) $y = \ln(\sin(x))$

k) $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

l) $y = 3^{x^2+x}$

4.4.3 Problemi con valori estremi

Saper formalizzare semplici “problemi di massimo e minimo” e risolverli con l’ausilio del calcolo differenziale.

Un'interessante applicazione del calcolo differenziale è rappresentata dai *problemi di ottimizzazione*, in cui un determinato processo dev'essere innanzitutto descritto con l'ausilio di un'opportuna funzione reale, e in un secondo tempo studiato per mezzo della derivata di quest'ultima.

Esempi

1. Un contadino vuole delimitare un pollaio di forma rettangolare affiancandolo al muro rettilineo di un fienile. Se ha a disposizione 40 metri di recinzione per realizzare i tre lati quanto varrà, al massimo, la superficie del pollaio?
2. Quali devono essere le dimensioni di una scatola a base quadrata, senza coperchio, di volume 1m^3 in modo tale che il materiale richiesto per la sua costruzione sia minimo?

4.4.4 Discussione delle curve

Saper ricavare le proprietà essenziali di una funzione e utilizzarle per schizzarne il grafico.
Lo “studio di funzioni” riunisce i vari metodi, sia elementari che relativi al calcolo infinitesimale, che permettono di descrivere le caratteristiche di una funzione reale a partire dalla sua espressione algebrica, al fine di comprenderne l’andamento e di tracciarne il grafico.

Esempi: studia e rappresenta graficamente la funzione $y = f(x)$:

$$\text{a) } y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2 \qquad \text{b) } y = \sqrt{4 - x^2} \qquad \text{c) } \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

4.5 Calcolo integrale

Comprendere a livello intuitivo una definizione di integrale definito.

Pur non pretendendo di formalizzare in modo rigoroso la nozione di integrale (secondo Riemann, Darboux o Lebesgue), sarà opportuno, anche facendo capo ad una definizione intuitiva del concetto di limite, familiarizzarsi con una nozione di *integrale definito* che vada al di là della semplice “area sotto una curva”.

4.5.1 Il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale

Conoscere la relazione tra derivazione e integrazione.

Derivare e integrare rappresentano, essenzialmente, processi tra loro inversi. Questo è, in sintesi, l’enunciato più significativo del calcolo infinitesimale. Nonostante la sua non immediata accessibilità, si tratta di un concetto basilare, dal momento che su di esso si fondano le tecniche più elementari del calcolo integrale.

4.5.2 Integrazione elementare

Saper integrare semplici funzioni, facendo uso dell’integrazione diretta e delle regole della linearità.

Contrariamente al calcolo differenziale, che ha un carattere prettamente meccanico, il calcolo integrale presenta asperità di carattere tecnico che, a livello di “competenze di base”, rendono opportuna una sua trattazione solo nei casi più elementari, che non richiedono l’impiego di tecniche sofisticate (integrazione *per parti* e *per sostituzione*).

Esempi

1. Data la funzione $y = f(x)$, determina $\int f(x) dx$:

a) $y = 2x + 1$

b) $y = x^2 - 5x + 7$

c) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

d) $y = 2 \sin(x)$

e) $y = \frac{x^3 + 2}{x^2}$

f) $y = \frac{5}{6x}$

g) $y = (3x - 1)^3$

h) $y = 2x + 3 \cos(x)$

i) $y = \sin(3x + 2)$

j) $y = \sqrt{1 - 2x}$

2. Calcola i seguenti integrali definiti:

a) $\int_0^2 (2x + 1) dx$

b) $\int_{-1}^3 (6x^2 - 4x - 6) dx$

c) $\int_{-1}^1 (u^4 + 1) du$

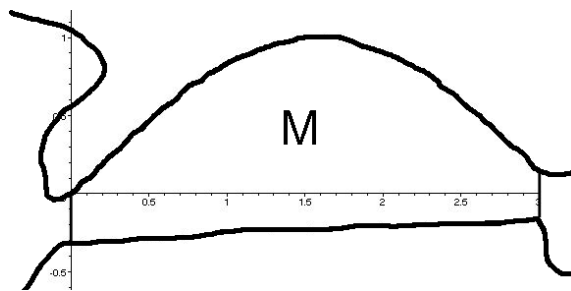
d) $\int_{-1}^1 \frac{5}{(2x + 3)^2} dx$

3. Nella cartina qui di fianco si vede il terreno di Michela (M), delimitato da due segmenti e da due fiumi i quali, approssimativamente, corrispondono alle funzioni

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{e} \quad g(x) = -\frac{1}{x+3}$$

nel tratto che delimitano il terreno di Michela. Determina la superficie del terreno.

NB: le unità sono in hm.



5 Statistica descrittiva

La *statistica* è la branca della matematica che ha per fine lo studio quantitativo di un *fenomeno aleatorio*, ossia che dipende almeno in parte dal caso.

La branca è piuttosto ampia e profondamente legata alla teoria della probabilità (vedi capitolo seguente), ma all'interno del percorso liceale spesso si affronta unicamente la *statistica descrittiva*, i cui scopi sono la descrizione e la rappresentazione di raccolte di dati statistici, fornendo nel contempo alcuni strumenti per la loro lettura.

Si parla di *dati statistici* in presenza di un insieme di valori (non necessariamente numerici) che corrispondono a esiti di uno stesso fenomeno aleatorio. Ad esempio, tutte le informazioni risultanti da un sondaggio, oppure ottenute raccogliendo dati esaminando più individui di una specie (in particolare in biologia), sono dei dati statistici. Esistono vari modi per rappresentarli, e non sempre tutti sono adatti al tipo di dati raccolti (ad esempio un *grafico a radar* non è adatto per rappresentare una variabile che può assumere due soli valori).

Esistono due tipologie di dati statistici: quelli *discreti* e quelli *continui*. I primi sono quelli in cui il dato appartiene ad un insieme enumerabile (che può cioè essere elencato), come ad esempio il punteggio ottenuto lanciando una freccetta contro un bersaglio, mentre i secondi sono quelli in cui il dato appartiene ad un insieme che non può essere elencato, come ad esempio il punto del bersaglio che viene colpito dalla freccetta. Per lavorare con i dati continui (ma a volte si esegue la stessa operazione anche con dati discreti se gli esiti sono troppi) occorre saper raggruppare i dati in *classi*.

5.1 Rappresentazione grafica di dati statistici

La rappresentazione grafica dei dati statistici permette di visualizzarne a colpo d'occhio le caratteristiche. Spesso, alcune rappresentazioni sono più adatte allo scopo di altre.

Conoscere e saper interpretare alcune rappresentazioni di dati relativi ad un rilevamento statistico (areogrammi, istogrammi, ...) e scegliere una rappresentazione adatta ai dati a disposizione.

Occorre conoscere pregi e difetti delle diverse caratteristiche, sia per scegliere la più adatta allo scopo che si vuole raggiungere, sia per capire i dati rappresentati da altri.

Esempio: di seguito è elencato il numero di telespettatori delle diverse puntate delle ultime 4 settimane di un telefilm in onda ogni giorno (dal lunedì al venerdì) alla stessa ora.

32 611	36 343	40 827	45 231	50 103	49 027	51 060	48 617	60 993	48 553
41 373	48 227	53 142	52 771	46 827	48 435	52 441	53 316	48 029	56 041

- Si tratta di dati continui o discreti? Perché?
- Raggruppa i valori in fasce da 5 000 (iniziando con la fascia $[30\,000, 35\,000[$)
- Rappresenta questi dati su un istogramma.

5.2 Misure di centralità e di dispersione

A volte le diverse rappresentazioni grafiche di dati statistici permettono di visualizzare a colpo d'occhio alcune caratteristiche dei dati statistici, ma d'altra parte impediscono di renderne adeguatamente visibili altre.

Conoscere e saper interpretare alcuni indici di centralità quali la media aritmetica, la mediana e la moda. Saper identificare la misura di centralità più adatta allo scopo, tenendo presente che le prime due si applicano solo a dati statistici numerici.

Conoscere e saper interpretare alcuni indici di dispersione quali la varianza e la deviazione standard.

Occorre conoscere dei parametri essenziali per poter confrontare in maniera più oggettiva i dati tra loro.

Esempi

1. Riprendi i dati del problema dei telespettatori alle puntate di un telefilm.
 - a) Considerando le fasce definite nell'esercizio, determina la moda.
 - b) Calcola la media aritmetica dei dati.
 - c) Stabilisci la mediana dei dati.
 - d) Calcola la varianza dei dati.
 - e) Che significato ha, in questo contesto, una varianza alta? Ed una bassa?
2. Una coppia di dadi viene lanciata 100 volte, e dopo ogni lancio viene annotata la somma dei punteggi:

11	9	7	7	10	7	11	7	10	7
6	11	6	10	4	6	5	9	7	7
9	7	6	4	8	7	10	12	4	6
6	10	10	4	3	7	9	9	11	10
9	2	7	6	6	4	12	5	4	4
5	10	8	12	7	9	4	7	10	7
7	9	8	3	3	12	6	11	5	10
2	9	2	8	10	10	5	10	7	7
9	4	4	2	7	2	7	8	12	11
6	5	3	10	10	6	2	6	5	6

- a) Determina, per ogni esito, le frequenze assolute e relative.
- b) Rappresenta la distribuzione delle frequenze per mezzo di un areogramma e di un istogramma. Determina pure le frequenze *cumulate*, e rappresentane l'istogramma.
- d) Calcola la media aritmetica, la mediana, la moda, la varianza e la deviazione standard dei dati rilevati.

6 Calcolo combinatorio e delle probabilità

Il calcolo delle probabilità è una delle branche più giovani della matematica trattata nelle scuole superiori. Malgrado il gioco d'azzardo sia archetipico, per cui la domanda su una possibile vincita oppure perdita in tali giochi sia antica quanto l'umanità, il trattamento sistematico di quesiti probabilistici risale solo al Settecento, secolo in cui, partendo sempre da problemi nell'ambito del gioco d'azzardo, i matematici svilupparono una teoria sempre più formale.

Dal momento che il calcolo delle probabilità a volte necessita del calcolo combinatorio, accenniamo innanzitutto qualche elemento di quest'ultimo.

6.1 Calcolo combinatorio

La *combinatoria* è la branca della matematica che studia gli insiemi finiti. Il *calcolo combinatorio* è l'arte di contare e permette di rispondere a domande quali ad esempio: *dato un insieme, in quanti modi diversi posso*

- *allineare i suoi elementi?*
- *scegliere tre elementi e allinearli?*
- *scegliere tre elementi senza considerarne l'ordine di scelta?*

Tutti i problemi del calcolo combinatorio possono essere ricondotti ad un principio fondamentale: la *regola del prodotto*.

Saper ricondurre semplici problemi di calcolo combinatorio alla regola del prodotto.

Esempio: il guardaroba di Carlo consiste di 3 paia di pantaloni e di 4 magliette. In quanti modi si può vestire?

Per trovare il numero di casi possibili, bisogna prestar particolare attenzione alle condizioni poste: si scelgono tutti gli elementi dell'insieme o soltanto una parte? Gli elementi possono essere scelti una sola volta oppure ripetutamente? Gli elementi si mettono in un ordine o si considerano sciolti?

Esempi

1. Quanti anagrammi, cioè sequenze ordinate, si possono formare con le seguenti parole?

a) BLU b) ROSA c) VIOLA d) SALMONE

E con una parola di n lettere diverse?

2. Quanti anagrammi, cioè sequenze ordinate, si possono formare con le seguenti parole?

a) VERDE b) ROSSO c) AZZURRO d) ARANCIONE

3. Utilizzando ognuna delle 4 lettere ROSA una sola volta, quante “parole” lunghe

a) 2 lettere b) 3 lettere

puoi scrivere? E utilizzando una parola di n lettere diverse?

4. Utilizzando le 4 lettere ROSA, quante “parole” lunghe

a) 2 lettere b) 3 lettere

puoi scrivere, se sono permesse ripetizioni? E utilizzando una parola di n lettere diverse?

5. Un barista ha a disposizione 5 bevande (A, B, C, D, E). Quanti cocktail può ideare mescolando

a) 2 bevande b) 3 bevande

se sceglie una bevanda al massimo una volta? (Premessa: l'ordine in cui le bevande vengono aggiunte non conta!)

6.2 Definizioni di probabilità

6.2.1 Definizione classica o laplaciana

Nel primo approccio si definisce la “probabilità classica” di un evento come il quoziente fra il numero di “casi favorevoli” e il numero di “casi possibili”. Questo modello si applica in un contesto dove gli esperimenti vengono svolti in perfette condizioni di uniformità e pertanto non c'è motivo di privilegiarne alcun esito.

Conoscere la definizione di probabilità classica, riconoscere esperimenti casuali che si possono descrivere mediante probabilità classica e saper calcolare la probabilità degli eventi.

A volte, il calcolo combinatorio fornisce uno strumento prezioso per determinare il numero di casi possibili risp. favorevoli.

Esempi

1. Dieci studenti sono seduti in fila. Con quale probabilità accade che due di loro, che non si sopportano, saranno seduti agli estremi?

2. Giulia e Cecilia lanciano una moneta due volte ciascuna. Qual è la probabilità che
 - a) Giulia ottenga più teste di Cecilia?
 - b) Cecilia ottenga più teste di Giulia?
 - c) una delle due ottenga più teste dell'altra?
3. Qual è la probabilità che, lanciando due dadi, la somma dei punteggi sia un numero primo?
4. Una schedina del totocalcio consiste in un elenco di 13 partite con i loro possibili esiti. Si deve cercare di pronosticare il risultato di ciascuna, indicando se vincerà la squadra che gioca in casa (1), la squadra ospite (2) o se la partita si concluderà con un pareggio (X).
 - a) In quanti modi diversi si può completare la schedina?
 - b) Supponendo di giocare la schedina a caso, qual è la probabilità di fare 13, cioè di indovinare tutti i pronostici?
 - c) Supponendo di giocare la schedina a caso, qual è la probabilità di fare 12, cioè di indovinare tutti i pronostici tranne uno?

6.2.2 Probabilità frequentistica oppure statistica

Gran parte dei problemi concreti non è accessibile attraverso il concetto di probabilità classica, in quanto spesso è errato considerare eventi elementari equiprobabili. Alcuni problemi possono essere risolti con l'approccio frequentistico oppure statistico.

Riconoscere esperimenti casuali per i quali le probabilità vanno determinate attraverso frequenze oppure statistiche.

L'esperimento casuale viene ripetuto un gran numero di volte e si definisce la probabilità di un evento come frequenza relativa con la quale si era manifestato (frequentistico), oppure si consulta una statistica già svolta dell'esperimento.

Esempi

1. L'anno scorso nel comune X sono stati registrati i seguenti numeri di scassi in case o appartamenti:

mese	gen	feb	mar	apr	mag	giu	lug	ago	set	ott	nov	dic
frequenza	9	13	2	0	1	2	5	4	0	3	8	12

Con quale probabilità pronostichi uno scasso per il prossimo agosto risp. novembre?

2. Uno studente può superare oppure no gli esami di maturità. Sarebbe però poco sensato attribuire a ciascuna delle due possibilità la probabilità $\frac{1}{2}$, secondo la probabilità classica. Come si potrebbero ottenere delle probabilità più sensate?

3. Osservando un campione iniziale di 800 settantenni, si rileva che 680 hanno festeggiato il 75-esimo compleanno e 512 pure l'80-esimo. Stima la probabilità che un settantenne
- a) sopravviva almeno cinque anni,
 - b) sopravviva almeno dieci anni,
 - c) muoia prima degli 80 anni,
 - d) muoia fra le età settantacinque e ottanta.

6.2.3 Gli Assiomi di Kolmogorov

Andrei Kolmogorov (1903 - 1987), forse il più importante teorico delle probabilità del XX secolo, riconobbe che una funzione di probabilità p deve soddisfare soltanto tre condizioni: *positività* (le probabilità sono positive), *normalizzazione* (l'evento certo ha probabilità 1) e *additività* (le probabilità di eventi incompatibili si sommano). Da queste seguono in particolare le relazioni per *l'unione*, la *differenza* e il *complemento*, che spesso permettono di ricondurre la probabilità di un evento al calcolo di probabilità più semplici.

Calcolare la probabilità di un evento applicando opportunamente le formule relative alle operazioni insiemistiche.

Esempi

1. Lanciando un dado due volte, con quale probabilità non uscirà mai 6?
2. Un dado è truccato in modo che le facce 4 e 6 abbiano probabilità doppia delle altre quattro che sono equiprobabili. Costruire lo spazio probabilistico adeguato agli esiti del lancio del dado e calcolare la probabilità di ottenere
 - a) un numero dispari, a) un numero maggiore di 3?
3. Anna, Beatrice e Carla fanno una gara di corsa. Stimo che Anna e Carla siano ugualmente veloci e che Beatrice abbia probabilità doppia delle altre due di vincere la gara. Quale probabilità attribuisco alla vittoria di ciascuna?
4. Alla tombola si estrae a caso un numero naturale fra 1 e 90. Determina la probabilità che il numero estratto sia
 - a) pari,
 - b) non multiplo di 3,
 - c) pari e non multiplo di 3,
 - d) pari oppure non multiplo di 3,
 - e) dispari e non multiplo di 3.

6.3 Probabilità condizionata

Spesso, il verificarsi di un evento B è condizionato dall'esito di un secondo evento A (ad esempio, la conoscenza del colore del seme di una carta da gioco estratta a caso fornisce un'informazione supplementare sfruttabile). La formula della *probabilità condizionata* permette di determinare la probabilità di un evento B sottoposto alla condizione che un ulteriore evento A si è verificato, indicata con $p(B|A)$.

Conoscere la definizione di probabilità condizionata e saperla interpretare come probabilità in uno spazio campionario ristretto rispetto a quello originale.

Esempi

1. Il direttore di una scuola vuole avere una vista d'insieme sulle iscrizioni nei corsi di approfondimento dei suoi allievi di 4^a. Perciò denomina gli eventi A : "l'allievo sceglie il corso di approfondimento di tedesco" e B : "l'allievo sceglie il corso di approfondimento di francese" e redige la seguente tabella:

	B	\bar{B}
A	61	22
\bar{A}	19	32

- a) Quanti allievi comprende la 4^a?
- b) Il direttore sceglie a caso un allievo di 4^a. Aiutalo a calcolare le probabilità di

$$p(A), p(B), p(A|B), p(\bar{B}|A), p(A|\bar{B}), p(\bar{A}|\bar{B}) \quad .$$

2. In una partita di calcio, le probabilità dei tre eventi A : "la squadra di casa vince", B : "pareggia" e C : "perde" sono stimate rispettivamente con 0,5, 0,3 e 0,2. Avvicinandoci al ritrovo dei tifosi locali vediamo esposta la bandiera della squadra di casa, il che accade quando essa non ha perso. Come valutiamo adesso le probabilità dei tre eventi?
3. Siano A l'evento "il ladro ispeziona bene la banca" e B l'evento "il furto va a segno".
 - a) Traduci in simboli le seguenti affermazioni:
 - (i) La probabilità che il ladro non ispezioni bene la banca e il furto riesca lo stesso è 0,1.
 - (ii) La probabilità che il furto non vada a segno, malgrado che il ladro abbia ispezionato bene la banca, è 0,3.
 - d) Determina la probabilità che il furto vada a segno, sapendo che il ladro ha ispezionato bene la banca.
 - e) Sapendo che il furto va a segno con una probabilità del 40%, determina la probabilità che il ladro, avendo messo a segno il furto, non abbia ben ispezionato la banca.

6.4 Dipendenza e indipendenza stocastica

Il verificarsi di un evento può influire sulla probabilità del verificarsi di un altro evento oppure no. Nel caso in cui il verificarsi di un evento B non modifichi la probabilità di un evento A , i due eventi sono detti *stocasticamente indipendenti*. In caso contrario, si parla di *dipendenza*.

Ipotizzare dal contesto oppure dedurre tramite un calcolo se due eventi sono dipendenti oppure indipendenti.

A volte non è immediato osservare se tra due eventi vi è una dipendenza causale, e due eventi possono apparire legati o slegati tra di loro. Tuttavia, soltanto con un confronto numerico è possibile confermare oppure smentire una dipendenza reciproca.

Esempi

1.
 - a) Tre lanci consecutivi di una moneta (equa) hanno dato esito “testa”. Con che probabilità anche il quarto lancio darà esito “testa”?
 - b) Commenta la frase: “Il caso non ha memoria.”
2. Si lanciano due dadi contemporaneamente e si considerano gli eventi A : “sono uscite due facce uguali” e B : “sono uscite due facce dispari”.
 - a) Indica gli eventi A e B in estensione.
 - b) Decidi se A e B sono dipendenti o indipendenti, motivando la tua risposta con i calcoli necessari!
 - c) Definisci un evento C incompatibile con B , ossia tale che $B \cap C = \emptyset$.
3. Sia (Ω, p) uno spazio di probabilità, e siano $A, B \subset \Omega$ due eventi indipendenti. Si può concludere che pure \bar{A} e \bar{B} sono indipendenti fra loro? Motiva la tua risposta!

A Appendice: Scuola Cantonale di Commercio

In Ticino, oltre ai licei, anche la Scuola Cantonale di Commercio (SCC) porta ad ottenere un attestato di Maturità. Il curriculum duale della SCC tuttavia differisce per alcuni aspetti dal percorso liceale. Infatti la SCC, unitamente ad una formazione generale di tipo liceale con indirizzo economico che porta al conseguimento di un attestato di Maturità cantonale, offre anche una certificazione professionale, l'*Attestato Federale di Capacità in impiegato di commercio*. Ragione per la quale, la SCC privilegia l'interdisciplinarietà con l'economia e ha come argomento caratterizzante la matematica finanziaria (tema non menzionato nell'*Appendice ai piani quadro di studi per le scuole di maturità del 9 giugno 1994*).

Per evidenziare la differenza tra i piani di studio liceali e della SCC verranno di seguito elencati tutti gli argomenti citati nel presente documento che non vengono trattati alla SCC. Inoltre, verrà aggiunto un paragrafo relativo alle competenze di base in matematica finanziaria.

A.1 Temi non affrontati alla SCC

I temi descritti nei paragrafi seguenti non vengono trattati alla SCC, in quanto non fanno parte del piano di studio:

- **2.7 Sistemi di equazioni:** non viene trattata la regola di Cramer;
- **2.8 Disequazioni:** non vengono trattate le disequazioni irrazionali;
- **3.1.1 Angoli e poligoni a n lati;**
- **3.1.4 Volumi di solidi elementari;**
- **3.1.5 Similitudine:** non viene trattato il Teorema di Talete;
- **3.3.2 Geometria analitica: distanze, ampiezze, aree, volumi:** non vengono trattati né aree né volumi nel caso tridimensionale;
- **3.3.3 La retta nel piano e nello spazio:** non viene trattato né il caso tridimensionale né la descrizione parametrica di una retta;
- **4.2 Proprietà delle funzioni elementari:** non vengono trattate le funzioni trigonometriche inverse;
- **4.5 Calcolo integrale.**

Inoltre alla SCC non si pone l'accento sull'applicazione della matematica negli ambiti della fisica e della chimica.

A.2 Matematica finanziaria

La *matematica finanziaria* è la branca della matematica basata sulle cosiddette *operazioni finanziarie*. In generale un'*operazione finanziaria* avviene quando vi è uno scambio di somme di denaro (detti *capitali*) in tempi diversi. La relazione tra questi capitali può essere descritta dal punto di vista matematico dalla formula $M = C + I$, dove C è il *capitale iniziale*, I è l'*interesse*, ossia il compenso aggiunto al capitale iniziale, e la somma di queste due quantità M viene detto *montante*, cioè il capitale ottenuto al termine dello scambio di denaro. Il procedimento mediante il quale l'interesse viene aggiunto al capitale è detto *capitalizzazione*.

A.2.1 Capitalizzazione composta

Nelle operazioni bancarie, per ogni unità di tempo (generalmente annuale) viene applicato un certo *tasso d'interesse* sul capitale depositato o prestato. Per calcolare l'importo dopo un certo lasso di tempo viene utilizzato prevalentemente il *regime di capitalizzazione composta*. Le informazioni cardine per poter determinare tale capitale sono il capitale disponibile all'inizio, detto *capitale iniziale*, il *tasso d'interesse* applicato e la *durata* di tale operazione. In questo modo è possibile monitorare la variazione del capitale in funzione del tempo e del tasso d'interesse applicato. Di conseguenza è possibile prevedere quale tasso d'interesse bisogna applicare oppure che capitale iniziale bisogna impiegare per ottenere una certa somma, oppure ancora per quanto tempo impiegare l'importo, ...

Comprendere il concetto di capitalizzazione composta.

L'interesse viene calcolato corrispondendo dopo ogni unità di tempo una percentuale del capitale finale del periodo precedente (ciò significa che vengono presi in considerazione gli interessi generati già durante i periodi precedenti).

Esempio: calcolare quale sarà il capitale dopo 1, 2, 3 e 4 anni, se si investe, con un processo di capitalizzazione composta, un capitale iniziale di $C = 20\,000$ franchi ad un tasso d'interesse annuo $i = 1,5\%$.

Essere in grado di utilizzare la formula della capitalizzazione composta sia in problemi diretti che indiretti.

Si tratta di riuscire a interpretare il problema, riconoscendo correttamente le informazioni cardine fornite, in modo da poter applicare la formula della capitalizzazione composta e ricavare i dati mancanti.

Esempi

1. Se vengono depositati 1 000 franchi in banca ad un tasso di interesse annuo composto i del 2%, quanto capitale sarà disponibile dopo 10 anni?

2. Un giovane imprenditore vorrebbe fondare una ditta tra 7 anni. Come capitale iniziale di questa nuova ditta avrebbe bisogno di 50 000 franchi. Quale capitale dovrebbe investire oggi con un tasso d'interesse annuo composto i del 10%?
3. Un capitale iniziale di 12 400 franchi viene impiegato per 20 anni in regime di capitalizzazione composta riuscendo così ad ottenere un montante di 20 318,80 franchi. A quale tasso d'interesse annuo è stato impiegato il capitale?

A.2.2 Rendite

Con la capitalizzazione composta ci si occupa prevalentemente dei casi in cui avviene un unico versamento/prelievo su un conto bancario. Nel caso di una rendita si considerano invece situazioni nelle quali vengono fatti versamenti o prelievi regolari sul/dal conto.

Capire il concetto di rendita.

Si dice *rendita* una successione di capitali pagabili (o esigibili) a scadenze determinate e regolari, dette *rate*. Esempi di rendite sono:

- lo stipendio,
- l'affitto,
- abbonamento telefonico *all-inclusive*,
- le assicurazioni,
-

Esempio: ho intenzione di versare ogni anno 1 200 franchi per 4 anni su di un libretto di risparmio ad un tasso d'interesse annuo del 3%. Il pagamento avviene alla fine di ogni anno (31 dicembre). Di quanto potrò disporre al momento dell'ultimo pagamento (cioè alla fine del quarto anno)?

Capire cos'è il montante di una rendita ed essere in grado di utilizzarne la formula.

Il *montante* di una rendita è il valore complessivo di tutte le rate calcolate tramite capitalizzazione composta alla fine dell'ultimo periodo. È fondamentale riuscire a interpretare il problema, riconoscendo correttamente le informazioni fornite, in modo da poter applicare la formula del montante di una rendita e saper ricavare da essa i dati mancanti.

Esempi

1. Una rendita è costituita da 4 rate annue, versate a fine anno, di 2 600 franchi valutate a un tasso d'interesse del 2% annuo. Calcolarne il montante.
2. Il montante di una rendita annua calcolata ad un tasso annuo del 3% è di 10 000 franchi. Se le rate sono 15, calcolare il valore di ogni rata, se versate alla fine dell'anno.

