L'insegnamento della matematica mediante «situazioni»

Idee e suggerimenti emersi in seno al «Deuxième Forum pour l'enseignement mathématique» organizzato dalla Conferenza svizzera dei direttori cantonali della pubblica istruzione.

Il secondo Forum svizzero per l'insegnamento della matematica, che ha avuto luogo a Interlaken, ha dedicato i suoi lavori a un tema squisitamente pedagogico-didattico: «situations motivantes dans l'enseignement mathématique de la scolarité obligatoire».
Tema quanto mai di attualità, se si considerano gli sforzi che dappertutto si stanno compiendo per inserire nei programmi di matematica attività realmente stimolanti, vicine agli interessi degli allievi, armoniosamente legate agli altri aspetti dell'insegnamento.
Il principio secondo cui l'insegnamento dell'artimetica nella scuola elementare deve muovere da azioni concrete non viene sicuramente messo in discussione. Tuttavia esso necessita di suggerimenti nuovi, di idee traducibili nella realtà della classe in attività che consentano al fanciullo, da un lato, di raggiungere e consolidare determinate abilità intellettuali, dall'altro di utilizzare le proprie capacità inventive, di verificare sperimentalmente le ipotesi formulate, di esplorare piste diverse senza timore di sbagliare.
Compito della scuola è dunque di porre gli allievi di fronte a situazioni concrete, capaci di suscitare la loro curiosità e quindi il desiderio di «misurarsi con il problema». Tali situazioni possono scaturire dalla vita quotidiana, oppure essere proposte dall' insegnante sotto forma di giochi, di indovinelli finalizzati all'acquisizione di nuovi traguardi, oppure all'impiego intelligente delle conoscenze che l'allievo possiede.
Una situazione, così come è intesa, consiste in un problema aperto, suscettibile di diverse elaborazioni di tipo matematico. I dati a disposizione sono poco strutturati e possono essere di diversa natura: materiale concreto, misure di grandezze, informazioni statistiche, osservazioni su eventi della vita quotidiana, numeri ecc.
Il punto di partenza e le possibili piste da esplorare emergono da un'analisi dei dati a disposizione. Il problema è formulato in modo tale da non costringere gli allievi a seguire una pista unica; sono aperte varie direzioni, secondo le possibilità intellettuali e gli interessi di ognuno.
A seconda degli stimoli che riesce a suscitare, una determinata situazione può dare il via a una serie di attività che si protraggono per più giorni. Gli aspetti del programma che affiorano nel corso della ricerca vengono di volta in volta puntualizzati e consolidati. In questo genere di attività il ruolo del maestro è determinante. La sua abilità consiste in primo luogo nel suggerire o nell'afferrare un problema particolarmente ricco di motivazioni intrinseche; secondariamente egli deve essere disponibile verso ogni possibile aspetto della ricerca, proponendo agganci significativi con le altre materie (geografia, storia, scienze, lingua). Ciò suppone evidentemente una solida preparazione psicopedagogica e una personale predisposizione alla ricerca. Egli deve dar prova di pazienza e di fiducia negli allievi, concedere loro il tempo necessario per mettere in atto tentativi in varie direzioni, distoglierli da piste sterili prima che si scoraggino, osservare quali lacune impediscono di raggiungere la soluzione. L'insegnamento per mezzo di situazioni mette l'accento sul «savoir faire» degli allievi, piuttosto che sulle conoscenze; si propone cioè di sviluppare certe attitudini, come la capacità di osservare e organizzare i dati, lo spirito di ricerca, l'inventiva, la fiducia nelle proprie capacità, il desiderio di comunicare le proprie idee.
Ciò non significa trascurare gli aspetti tecnici dell'insegnamento della matematica privilegiando unicamente l'intuito o la fantasia, o, peggio ancora, illudersi che un progresso intellettuale possa aver luogo anche senza la padronanza degli strumenti necessari per impostare un ragionamento. Gli allievi stessi si accorgerebbero immediatamente dell'impossibilità di trarre una qualsiasi deduzione sulla scorta di calcoli o di procedimenti sbagliati. In questo senso, nella realtà della classe, una situazione può evolvere secondo momenti e finalità diversi, a seconda di ciò che si constata. A volte l'attività rivela quanto sia opportuno puntualizzare determinate tecniche prima di proseguire, a volte, invece, quanto sia utile favorire la ricerca di strategie ricorrendo a calcolatrici o a tavole che evitino noiose lungaggini e perdite di tempo. Sta al docente adattare i mezzi e le forme d'insegnamento agli obiettivi che intende perseguire.

Ricorriamo ad alcuni esempi

Si è detto che l'insegnamento mediante situazioni tende soprattutto a favorire dei comportamenti, mobilitando nel contempo gran parte delle conoscenze che l'allievo possiede. Ciò dipende dal fatto che il «problema» in sé non suggerisce alcun procedimento, alcun modo particolare di utilizzare i dati. L'attività mentale non è perciò limitata all'esecuzione di operazioni la cui successione è già nota in quanto ricalca modelli già «collaudati», ma investe una sfera di abilità ben più vasta concernente l'organizzazione delle informazioni, la loro sistematizzazione, la formulazione di ipotesi.
Per chiarire meglio il senso delle precedenti affermazioni, ricorriamo a due esempi di situazioni[1]). L'esposizione, per forza di cose sintetica, non permette di approfondire in tutti i particolari i vari sviluppi della ricerca. Lasciamo inoltre all'insegnante il compito di valutare il livello di preparazione che esse richiedono, di scegliere le modalità di realizzazione (attività collettiva, per gruppi ecc.), di considerare l'opportunità di distribuire il lavoro in momenti diversi.

Esempio 1: «A proposito di una serie di numeri...»

Consegna:

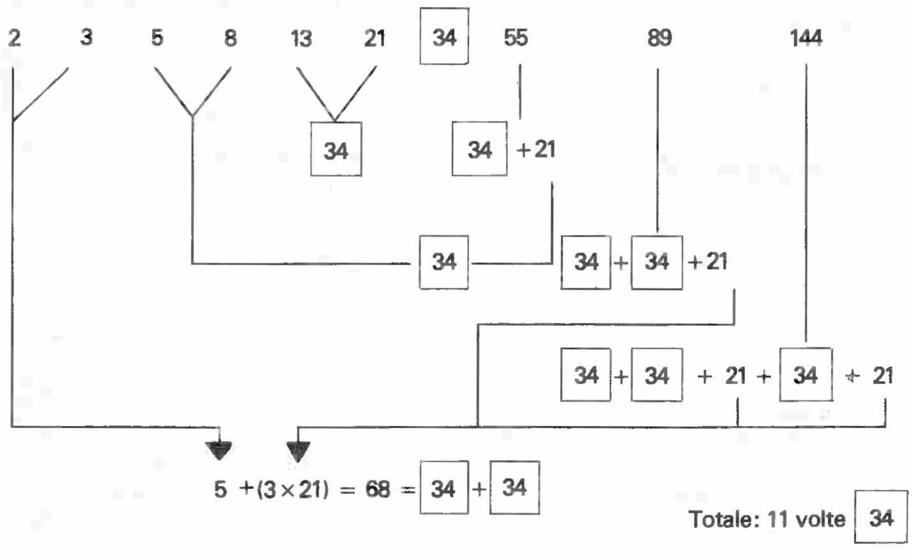
— scegliere due numeri interi **a** e **b**. Esempio: a = 2, b = 3;
— costruire una serie di numeri applicando la regola seguente:
  c = a + b d = b + c e = d + c f = ... ecc.
— scrivere i primi dieci numeri della serie;
  Esempio:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	l
2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

— calcolare la somma dei dieci numeri scritti:
  2 + 3 + 5 + ... + 89 + 144 = 374
— considerare il settimo numero della serie e moltiplicarlo per 11
  Esempio: 34 × 11 = 374
  Constatare che, qualunque siano i numeri di partenza, il prodotto è uguale alla somma precedentemente ottenuta (374).

a) **Ricerca:**

Come ritrovare 11 volte 34 nella serie iniziale?
(o, più in generale, come ritrovare 11 volte il settimo numero, nella serie completa?)
Una possibile strategia consiste nell'effettuare successive scomposizioni e ricomposizioni dei numeri della serie. Esempio:



Generalizzazione: le costatazioni fatte restano valide
— se **a** e **b** sono uguali?
— se **a** o **b** vale zero?

b) Calcolare la somma di n numeri della serie e confrontare il risultato con gli altri numeri rimanenti. È possibile scoprire qualche regolarità?

Esempio: $\underbrace{2 \quad 3 \quad 5}$ 8 13 21 ...
$2+3+5=10$, cioè 13-3

$\underbrace{2 \quad 3 \quad 5 \quad 8}$ 13 21 34 ...
$2+3+5+8=18$, cioè 21-3
altri casi

Gli allievi enunciano con parole loro la seguente legge:
la somma di n numeri è uguale al numero che si trova al secondo posto dopo l'ultimo addendo, diminuito del secondo numero della serie.

Con il linguaggio del matematico

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{i+2} - b$$

c) Scegliere un numero qualunque della serie; elevarlo al quadrato; effettuare il prodotto del numero che precede con quello che segue. Confrontare.

Esempio:

2 $\boxed{3}$ 5 8 $\boxed{13}$ 21 34 55 89 144

$3^2=9$ $2\times5=10$, cioè 3^2+1
$5^2=25$ $3\times8=24$, cioè 5^2-1

$8^2=64$ $5\times13=65$, cioè 8^2+1
$13^2=169$ $8\times21=168$, cioè 13^2-1
.....ecc.

La regola da scoprire è la seguente: il quadrato del numero scelto è uguale al prodotto dei numeri che, nella serie, lo precedono e lo seguono immediatamente, meno uno.

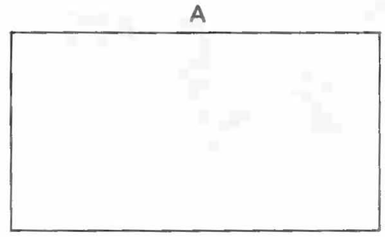
In linguaggio matematico: $x_i^2 = x_{i-1} \cdot x_{i+1} \pm$ costante

d) Esprimere sotto forma di frazione, e in seguito con i numeri con la virgola, il rapporto tra i numeri della serie (considerare numeri consecutivi).

2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	...
	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\frac{55}{34}$	$\frac{89}{55}$	$\frac{144}{89}$	...
	1,5	1,66	1,6	1,625	1,615	1,619	1,617	1,618	1,617	...

(notiamo qui la possibilità di ricorrere all'uso intelligente della calcolatrice).
I risultati ottenuti tendono verso 1,6180339, cioè verso il «numero aureo» conosciuto già dagli antichi.

Possibile estensione (a un livello superiore): ricerche sul «numero aureo»; riferimento al rettangolo.



Verifiche possibili:

$$\frac{A}{A+B} = \frac{B}{A}$$

Se $B = 1$ $\quad A^2 = A+1$
$\qquad\qquad A^2 - A - 1 = 0$

$$A = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \text{numero aureo}$$

e) Ulteriore sviluppo: notazione algebrica

2	3	5	8	13	21	34	.....
a	b	a+b	a+2b	2a+3b	3a+5b	5a+8b	.....

Notare che i coefficenti rispettano la medesima successione.

Conoscenze e tecniche utilizzate

Addizione e sottrazione — Scomposizione di numeri - Codificazione - Idea di ricorrenza - Equazioni - Moltiplicazione - Notazione algebrica - Calcolo - Potenze - Frazioni - Passaggio da frazioni a numeri con la virgola - Divisione - Perimetro del rettangolo.

Obiettivi più generali

Procedimento per tentativi - Elaborazione di ipotesi - Verifica di ipotesi - Generalizzazione di una regola - Creatività - ...

Esempio 2: «Con una manciata di fiammiferi...»

Sul tavolo si trova un certo numeri di fiammiferi.
Il gioco si svolge fra due allievi. Il giocatore che esegue la prima mossa può prelevare un numero qualsiasi di fiammiferi, ma non tutti. Il giocatore cui spetta la mossa successiva può impadronirsi pure lui di un numero qualsiasi di fiammiferi, rispettando un'unica condizione: non devono essere più del doppio di quelli presi dal giocatore precedente. Il gioco continua con questa regola. Vince chi, con la propria mossa, può impadronirsi degli ultimi (o dell'ultimo) fiammiferi giacenti sul tavolo.

a) I partecipanti cominciano a giocare qualche partita:
Esempio: con 10 fiammiferi
1) Il giocatore A ne prende 3 4
Il giocatore B ne prende 2 1 e vince
2) Il giocatore A ne prende 1 4 1
Il giocatore B ne prende 2 1 1 e vince

b) Dietro invito dell'insegnante, gli allievi stabiliscono delle ipotesi e provano a verificarle.
Esempi di ipotesi:
— con 10 fiammiferi non è possibile prevedere chi vincerà...
— vince chi si trova di fronte a un numero primo...
— ecc.
La verifica di queste ipotesi fa capo alla ricerca empirica di esempi e controesempi.

c) Passaggio a un procedimento di analisi sistematica.
È possibile prevedere chi vincerà partendo da una collezione di 2 fiammiferi, di 3 fiammiferi, di 4, ecc.?
Ricerca delle varianti possibili, registrando l'azione svolta dai singoli giocatori di fronte alle varie collezioni considerate.
Scoperta della regola secondo cui il giocatore che si trova di fronte a un numero della serie esaminata nella situazione precedente (2 - 3 - 5 - 8 - 13 - ...55, ecc.: serie di Fibonacci) è in posizione perdente, ritenuto che l'avversario sappia giocar bene.

d) Sviluppi possibili:
— medesima attività stabilendo la regola che consente a ogni giocatore di prelevare soltanto 1 o 2 fiammiferi (posizione perdente: multipli di 3);
— probabilità: se il numero di fiammiferi con cui si intende giocare viene estratto a sorte, conviene giocare per primo o per secondo?
— ecc.

Conoscenze e tecniche utilizzate

Combinatoria. Addizione e sottrazione. Probabilità. Frazioni. Ecc.

Obiettivi più generali

Ragionamento per induzione. Organizzazione di un metodo di procedura. Sistematizzazione nella notazione delle informazioni raccolte. Scoperta di strategie.

* * *

Gli esempi potrebbero continuare. Situazioni atte a suscitare attività matematiche interessanti possono prendere avvio da eventi occasionali, dalle varie occupazioni degli allievi, da visite o da costruzioni manuali. Alcuni suggerimenti:
— la vendita dei francobolli Pro Juventute
— la costruzione di un aquilone
— il traffico in vicinanza della scuola, in città,...
— la visita a un supermercato
— la composizione dei gruppi sanguigni (a seconda degli agglutinogeni presenti)

Le possibilità non mancano certamente. Un'attenta programmazione da parte dell'insegnante resta comunque una condizione necessaria per il successo dell'esperienza.

Mario Delucchi

1) Tratte dal rapporto del Gruppo di lavoro n.ro 1 animato da M.me Guillet nell'ambito del Forum citato.