

I problemi di matematica nel nuovo insegnamento

La nuova funzione dei problemi

Nell'insegnamento tradizionale la funzione principale dei problemi riguarda la verifica, il consolidamento e l'applicazione dei concetti imparati. Per questo li troviamo numerosi nelle serie di esercizi che seguono le lezioni e negli esperimenti da svolgere individualmente. Con il nuovo insegnamento a questa funzione viene ad aggiungersene (o, per lo meno, acquista maggior rilievo) un'altra, d'una apertura più grande, che investe tutto il processo d'apprendimento. I problemi non servono soltanto per accertarsi se gli allievi abbiano assimilato i concetti imparati e se siano in grado di applicarli correttamente in svariate situazioni, ma, attraverso la riflessione su di essi, consentono di scoprire relazioni, strutture e concetti nuovi, d'imparare cioè la matematica. Questo, in relazione al fatto che vengono proposti problemi che offrono un'apertura maggiore alla riflessione, al dialogo e non esauriscono subito la loro ricchezza istruttiva, come avviene spesso con i problemi tradizionali. L'interesse è centrato sui metodi di risoluzione più che sul risultato; la soluzione esatta passa in secondo piano. Una particolare attenzione è dedicata dall'insegnante anche ai tentativi infruttuosi, in quanto da essi possono scaturire elementi interessanti per la formazione della coscienza matematica. Capire le insufficienze di certi procedimenti aiuta a consolidare concetti non del tutto stabilizzati.

Si cerca di modificare inoltre l'atteggiamento degli allievi nei confronti del problema, che non deve richiamare l'idea d'uno spauracchio ma di qualcosa di appassionante. Gli alunni sono pure invitati a porsi problemi nuovi, interrogando la realtà che li circonda dal punto di vista dei rapporti matematici o partendo da schemi ricavati dalla risoluzione di problemi precedenti. Essi devono imparare ad assumere un comportamento più fiducioso verso i problemi.

Il procedimento d'analisi e di risoluzione dei problemi è facilitato, negli allievi delle classi sperimentali, da nuove conoscenze strumentali che consentono loro di tradurre in modo più economico e chiaro i termini del problema e comprendere meglio le relazioni esistenti tra i dati (ci riferiamo ai diversi tipi di diagramma: Venn, Carroll ecc.).

Dai problemi aritmetici ai problemi logico-matematici

Con il nuovo orientamento, il problema di matematica è considerato in un'accezione più vasta. Il problema è costituito dai dati, dalle condizioni (a volte implicite nei dati) e da una o più incognite.

In quelli tradizionali i dati riguardano i numeri o la loro applicazione a grandezze e le operazioni che intervengono sono quelle aritmetiche. Nel nuovo insegnamento, i dati del problema possono essere oggetti concreti, rappresentazioni grafiche, simboli numerici o meno; le richieste possono corrispondere a costruzioni reali, a disegni, a enunciati o ad altre attività particolari e le

operazioni da svolgere non sono unicamente di tipo aritmetico. Anche in relazione all'introduzione dei diagrammi, vengono proposti agli allievi numerosi problemi per la soluzione dei quali bisogna per esempio interpretare o completare un diagramma. Il campo dei problemi risulta perciò molto più ampio già a partire dal primo anno di scuola in quanto per problema si intende qualsiasi situazione spontanea o strutturata in cui, a partire da un certo numero di informazioni, bisogna cercare qualcosa con le forme del pensiero logico-matematico (non immediatamente ottenibile con gli schemi dell'abitudine).

Piaget ha messo in evidenza che parecchi casi di insuccesso scolastico nelle materie scientifiche sono in relazione con un passaggio troppo rapido dalle strutture qualitative dei problemi (ragionamento logico senza introduzione di numeri e delle leggi metriche) alle forme quantitative. Ora, i numerosi problemi-gioco imperniati sulla logica hanno appunto lo scopo di preparare il terreno alla comprensione delle astrazioni matematiche vere e proprie.

Si tratta di situazioni generalmente concepite partendo da un materiale strutturato (i blocchi logici del Dienes, per esempio) o da altri dispositivi concreti o figurativi preparati dall'insegnante con i suoi allievi. Talvolta, in apparenza, possono dare l'impressione di avere ben poco in comune con la matematica, mentre in realtà propongono situazioni che consentono di esercitare le strutture logico-matematiche del pensiero in profondità. Infatti, cambiando e combinando le regole dei giochi in modo diverso, essi arrivano a scoprire i fattori invarianti e quelli varianti, i rapporti di analogia, di differenza, di complementarità con gli altri giochi, a comprendere cioè la dinamica delle costruzioni matematiche.

Una domanda che i genitori rivolgono spesso agli insegnanti impegnati nell'esperienza «matematica moderna» è intesa a sapere se gli allievi risolvono ancora i cosiddetti problemi della vita reale (riguardanti le attività familiari, sociali, commerciali, dei trasporti e delle comunicazioni ecc.).

Il nostro modo di vedere è che questi problemi debbano mantenere il loro posto di riguardo nell'insegnamento. A condizione però che i problemi proposti agli allievi corrispondano effettivamente a situazioni reali. Purtroppo bisogna dire che sono entrati nelle scuole sotto l'etichetta di «problemi di vita pratica» numerosi problemi che con la vita pratica non hanno nessun legame. Non è infatti sufficiente che un problema parli di hl di vino o di m di stoffa per corrispondere a una situazione reale in cui l'allievo o la persona con la quale egli si identifica potrebbe trovarsi un giorno e l'altro.

Una maggiore apertura dei problemi

Quasi sistematicamente, i problemi proposti nelle classi tradizionali ammettono unicamente una soluzione e spesso, per risol-

verli, l'allievo è incline a utilizzare il condizionamento più che la riflessione.

Ora, nella vita d'ogni giorno siamo spesso di fronte a problemi che hanno parecchie o magari nessuna soluzione possibile, perché o i dati che disponiamo sono insufficienti, oppure si tratta d'un problema insolubile. Nel caso in cui le soluzioni possibili sono diverse, spesso ne esiste una che può essere considerata migliore in quanto offre vantaggi per rapporto alle altre, corrisponde meglio al temperamento, alla situazione presente di una determinata persona. Non sempre la soluzione migliore è quella più razionale. Di conseguenza occorre abituare gli allievi a considerare i problemi da questo punto di vista: quante soluzioni possono esserci? Ce n'è una più conveniente al mio caso? Essi impareranno così, anche in altre situazioni, a soppesare i vari elementi e a decidere in base a un'analisi particolareggiata.

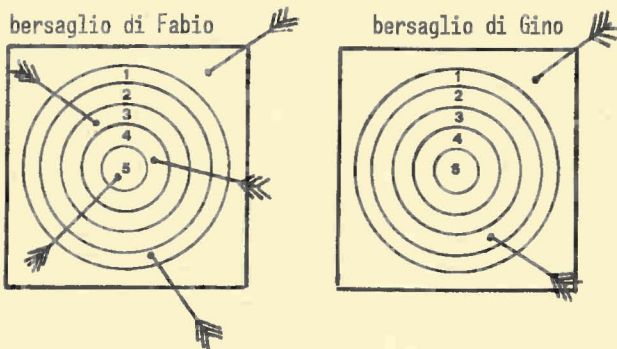
Inoltre, in alcuni problemi tradizionali l'allievo poteva arrivare benissimo alla soluzione esatta anche senza aver compreso perfettamente la struttura del problema, cioè mediante l'automatismo. Qui, questa possibilità non esiste, in quanto per scoprire tutte le soluzioni possibili è necessario avere compreso la struttura del problema nella sua totalità.

Quanto ai problemi che non ammettono soluzioni, a nostro avviso sembra pedagogicamente valido proporre, di tanto in tanto, problemi di questo tipo, in quanto consentono di comprendere veramente quali sono i dati e le condizioni necessarie per poter ottenere una costruzione, per determinare un'incognita particolare; ossia permettono di abituare il fanciullo a considerare il risultato come un elemento solidale di un certo numero di dati e di condizioni. La discussione attorno alle cause che non consentono di conseguire il risultato o che determinano certe incongruenze è molto formativa ai fini della comprensione matematica. Come negli altri campi della conoscenza, anche in matematica, affinché un'acquisizione diventi veramente tale, occorre che risulti inserita in un processo organico, cioè connessa ad altre conoscenze. Bisogna fare in modo che l'allievo stabilisca dei ponti tra le diverse isole di conoscenza. La coesione non deriva semplicemente dal mettere le conoscenze nuove accanto a quelle vecchie, implica qualcosa in più d'una semplice giustapposizione di acquisizioni: c'è differenza tra un mucchio di pietre e un muro.

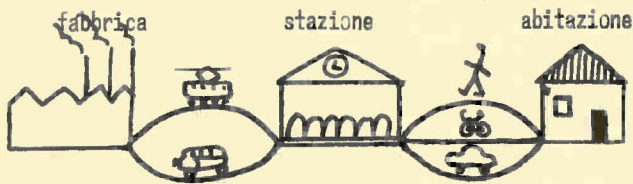
Possiamo sviluppare un atteggiamento dinamico di messa in relazione delle diverse conoscenze mediante i problemi a catena. Con essi intendiamo le attività che prendono avvio dalla soluzione d'un problema, la quale viene considerata come punto di partenza per un altro problema, e così via. Spesso, situazioni di questo tipo fanno seguito a certe scoperte relative a casi particolari, dove scaturisce abbastanza spontaneamente la questione a sapere se determinati nessi si verificano anche in situazioni più generali o di tipo diverso. Oppure si possono ottenere attraverso le trasformazioni d'un problema (facendo variare i dati, le condizioni ecc.). Con particolare entusiasmo da parte degli allievi sono considerati i cosiddetti problemi-indagine, cioè le ricerche che vengono svolte dalla classe o da gruppi di alunni attorno a problemi che

1. Esempi di problemi che ammettono varie soluzioni
(II classe)

Fabio ha lanciato le sue frecce. Gino deve ancora fare tre tiri. Disegna dove deve lanciarle per fare lo stesso punteggio di Fabio.



Il papà di Carlo per recarsi al lavoro può servirsi di vari mezzi di trasporto, come vedi nel disegno. Indica le diverse possibilità per recarsi al lavoro.

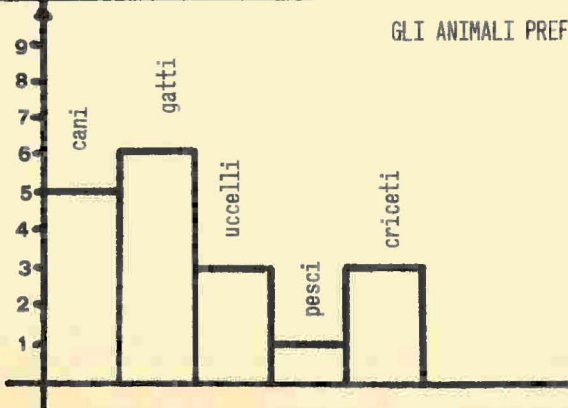


2. Esempio di problema senza una soluzione possibile
(II classe)

In un recinto ci sono alcuni cavalli in numero minore di 20. Marco dice che se li conto a 7 a 7 ne avanzano 2, se li conto a 4 a 4 ne avanzano 2. Quanti cavalli ci sono nel recinto?

(Contando a 7 a 7 i cavalli potrebbero essere: 9 o 16. Contando a 4 a 4 i cavalli potrebbero essere: 6, 10, 14, 18, 22, 26. I dati sono in contraddizione per cui non si può sapere il numero dei cavalli).

4. Esempio di problema-indagine



GLI ANIMALI PREFERITI (II classe, 25 allievi)

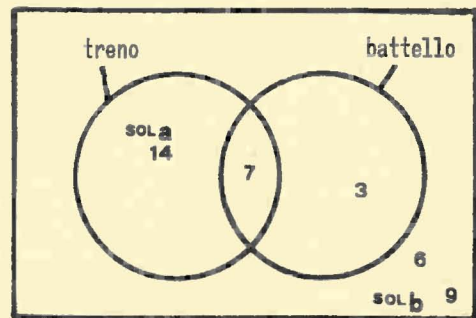
Comento d'un gruppo d'allievi

"Gli animali preferiti sono i gatti. $6 > 5 > 3 > 1$.
I gatti sono in numero doppio degli uccelli e dei criceti.
 $6 = 3 \times 2$. 3 è la metà di 6.
Soltanto Pippo ha i pesci.
 $5 + 6 + 3 + 1 + 3 = 18$. 18 è 2 volte 9. 18 è 3 volte 6.
Solo 16 bambini hanno animali; 9 non ne hanno. $25 - 16 = 9$.
Giorgio e Lisa hanno un cane e un gatto."

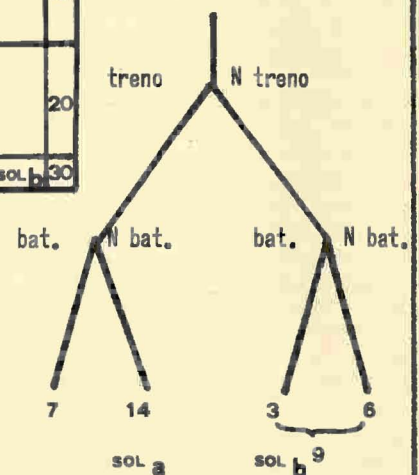
3. Esempio di problema risolvibile in modi diversi
(con l'utilizzazione del diagramma di Carroll, Venn e l'albero) (III classe)

In una classe ci sono 30 allievi. 21 hanno già viaggiato in treno; 7 hanno già preso il treno e il battello, 6 non hanno mai viaggiato né in treno né in battello.

- Quanti sono i bambini che hanno viaggiato solo in treno?
- E quelli che non hanno mai viaggiato in treno?



	treno	N treno	
battello	7	3	10
N bat.	SOL a 14	6	20
	21	9 SOL b 30	



riguardano i loro giochi, la loro vita scolastica, il loro ambiente o semplicemente la loro curiosità verso determinate cose. Si tratta di attività che insegnano all'allievo come la matematica sia uno strumento molto utile per descrivere e interpretare parecchi fenomeni della realtà e si applichi anche a settori che apparentemente presentano poche affinità con essa.

Sono questi i problemi che aiutano a stabilire un legame con le altre materie e a far capire l'interdisciplinarietà della conoscenza. In altre parole si tratta di situazioni in cui l'allievo mette in relazione due insieme (mesi dell'anno/frequenza di compleanni in ogni mese, giorni della settimana/condizioni atmosferiche ecc.) e che egli matematizza con forme grafico-figurative, mettendo in evidenza i rapporti da un punto di vista matematico. (cfr. il problema-indagine nella pagina precedente, sugli animali preferiti dalla classe).

Prima di affrontare la questione delle difficoltà che un allievo può incontrare risolvendo un problema, conviene ancora soffermarci un istante su due punti essenziali. Il primo riguarda l'invenzione o la libera composizione di problemi da parte degli alunni.

Se è importante insegnare ai fanciulli a risolvere i problemi, è altrettanto importante che imparino a porre i problemi facendoli nascere dalle situazioni più svariate. Infatti la formulazione del problema è un punto capitale del procedimento scientifico e si tratta di avviare i fanciulli, sin dai primi anni di scuola, a un atteggiamento scientifico nel porre e organizzare i loro perché.

Si tratta d'un aspetto fondamentale della didattica dell'insegnamento della matematica che merita di essere sviluppato in un lavoro a parte. Qui, limitiamoci a indicare come sia possibile sviluppare questo atteggiamento inventivo proponendo per esempio agli allievi situazioni in cui, a partire da un certo numero di informazioni (presentate in forma verbale o grafica), essi sono invitati a cercare nuove informazioni deducibili da quelle di partenza.

Sempre a proposito dell'invenzione di problemi vale la pena di segnalare i risultati sorprendenti ottenuti da Madeleine Goutard in certe scuole primarie canadesi e dagli insegnanti che da noi hanno seguito il suo insegnamento.

Alcuni esempi tratti dal libro di Goutard, *Les mathématiques et les enfants*, che dimostrano la ricchezza (in fatto d'immaginazione e di creatività) delle produzioni dei fanciulli.

Gens, 6 anni; Nell'oceano ci sono 800 cocodrilli e nel lago ce ne sono 200. In tutto $800 + 200 = 1000$ cocodrilli.

Harold, 7 anni; Un'aquila sorvolava una fattoria. Ha rubato 5 galline, 2 galli, 50 pulcini, 100 uova, 1 maiale. È una ladra. Quante cose ha rubato? $100 + 50 + 5 + 2 + 1 = 158$

Jean-Claude, 6 anni; Il nonno si è comperato un rasoio e la nonna l'ha sgridato 2² volte. Il nonno si è comperato una parucca e la nonna l'ha sgridato 2³ volte. Il nonno le ha comperato una gonna e essa non ha sgridato. Quante volte la nonna ha sgridato il nonno? $2^2 + 2^3 - 0 = 12$

L'altro punto concerne i procedimenti diversi per conseguire il medesimo risultato. Parecchi problemi possono essere risolti seguendo strade diverse.

Anche seguendo la medesima strada, generalmente, gli allievi la percorrono in modi diversi, a dipendenza della loro personalità, del loro livello di sviluppo, della loro esperienza ecc. È molto istruttivo discutere con loro i diversi procedimenti per prendere coscienza che possono esserci diverse vie per arrivare allo stesso punto e per imparare, di fronte a un problema difficile, ad affrontarlo da punti di vista diversi invece di interstardirsi nel voler seguire una sola pista. Ciò serve per rendersi conto che esistono metodi più economici (in fatto di risparmio di energie) in confronto con altri.

Psicopedagogia dell'errore nella risoluzione dei problemi

Senza avere la pretesa di voler identificare tutte le difficoltà che gli allievi possono incontrare risolvendo un problema, richiamiamo l'attenzione su alcuni punti critici ricavati dall'esperienza e dalla riflessione su un certo numero di lavori di psicopedagogia.

Del resto, gli specialisti stessi sono ancora lontani dall'aver risolto tutte le questioni a sapere come gli allievi reagiscono di fronte ai problemi. Le loro reazioni sono complesse e dipendono da molti fattori, spesso in interazione tra di loro, che si situano nel rapporto allievo-problema. Inoltre, non vi è sempre corrispondenza tra il semplice logico e il semplice psicologico: davanti a due problemi che noi adulti riteniamo l'uno facile e l'altro difficile, i fanciulli potrebbero riservarci delle sorprese mostrandoci di sapere risolvere quello difficile e sbagliare quello facile.

Lo scopo cui miriamo con le osservazioni che seguono è di mettere in evidenza alcuni aspetti importanti della psicopedagogia dei problemi e di richiamare agli insegnanti determinate difficoltà che l'allievo può incontrare, in modo che, una volta localizzato l'ostacolo, il loro intervento possa risultare più efficace.

I problemi devono essere significativi per gli alunni

Tutti gli insegnanti sanno, per averlo studiato e constatato attraverso l'esperienza, che l'allievo impara meglio quando è interessato all'argomento che costituisce l'oggetto d'apprendimento. La risoluzione d'un problema è, per eccellenza, un'attività che richiede la mobilitazione dell'intelligenza.

Pure noto è che ogni atto di intelligenza è solidale dell'affettività, la quale costituisce appunto l'aspetto energetico dell'azione. La conseguenza sul piano didattico è evidente: i problemi da proporre agli allievi devono interessarli.

Generalmente, un vero problema mobilita spontaneamente le energie perché causa nel soggetto uno stato di tensione affettiva e cognitiva che egli desidera eliminare, ristabilendo cioè l'equilibrio con la risoluzione del problema.

Se l'alunno normale non reagisce di fronte a un problema, molto probabilmente è perché il contesto è talmente distante dal suo mondo o dalla possibilità di identificarsi, che non lo può interessare; è cioè senza significato per lui. Potrebbe anche darsi però che il problema sia troppo facile (da non costituire più un problema) o troppo difficile. Si pone qui la questione del livello di

sviluppo e della soglia di difficoltà d'un problema, sulla quale è conveniente soffermarci un istante per qualche riflessione.

È risaputo che le capacità d'imparare e di risolvere determinati problemi sono in relazione con il livello di sviluppo del fanciullo. Questo sviluppo avviene per tappe che si succedono con una certa sequenza e a ogni stadio corrisponde un'organizzazione mentale particolare.

Studiando la questione delle relazioni tra processo di sviluppo e capacità potenziale d'apprendimento, Vygotskij introduce una distinzione, pertinente dal punto di vista delle conseguenze didattiche, tra **livello di sviluppo effettivo e area di sviluppo potenziale**. In pratica intende sottolineare quanto segue. Ciò che un bambino sa fare da solo, in modo indipendente, è condizionato dal suo livello effettivo di sviluppo conseguito. È pervenuto a un livello di sviluppo tale che gli consente di imparare e di capire determinate cose in modo autonomo.

Bisogna riconoscere però che potrebbe fare molto di più, comprendere contenuti e strutture più complessi se gli adulti lo aiutassero mediante domande-guida, esemplificazioni ecc. L'area di sviluppo potenziale corrisponde appunto a questa zona compresa tra ciò che l'allievo riesce a fare da solo e quello che sa compiere invece con l'aiuto degli adulti. Dal punto di vista didattico, questa distinzione è di estrema importanza. «Ciò che il bambino può fare oggi con l'aiuto degli adulti, lo potrà fare da solo domani. L'area di sviluppo potenziale ci permette di determinare i futuri passi del bambino e la dinamica del suo sviluppo, e di prendere in esame non solo ciò che lo sviluppo ha già prodotto ma anche ciò che produrrà nel processo di maturazione». (Vygotskij).

Quale, quindi, dovrà essere la soglia di difficoltà dei problemi da proporre agli allievi? A nostro avviso dipende dallo scopo che si desidera conseguire attraverso i problemi.

a) Se lo scopo è di consolidare certi concetti o di vedere in che misura sono stati assimilati, le difficoltà devono corrispondere alle possibilità relative a un determinato livello effettivo di sviluppo.

b) Se invece con i problemi si mira a altro scopo (quello d'imparare cose nuove) allora, in un certo senso, si deve percorrere lo sviluppo e proporre problemi le cui esigenze si situano nell'area di sviluppo potenziale.

Per concludere queste osservazioni attorno alla relazione sviluppo-apprendimento, conviene richiamare quanto sia auspicabile arrivare a una forma differenziata dei problemi a seconda degli allievi, in quanto i mutamenti nello sviluppo (livelli e aree di sviluppo) si verificano in periodi diversi, a dipendenza della personalità del singolo allievo, del suo modo di vita e di educazione.

Una particolare attenzione alla formulazione del problema

A volte la difficoltà nella risoluzione d'un problema può situarsi a livello del codice linguistico nel quale il problema è formulato. Ogni insegnante avrà fatto l'esperienza di accorgersi che un allievo ha sbagliato un problema non perché gli mancassero le capacità operative per risolverlo, ma per un

difetto di comprensione o d'interpretazione del testo del problema. Ci sembra utile fare qualche considerazione al riguardo.

Sappiamo che lo stesso oggetto o lo stesso fenomeno può essere descritto in modi diversi e che la stessa informazione può essere trasmessa con frasi molto differenti. Dal punto di vista psicologico si sa pure che l'assimilazione d'una informazione può variare a seconda del modo con il quale è codificata. In un articolo di Bruner e Olson¹⁾ troviamo l'esperienza seguente. Un ricercatore distribuisce a un gruppo di ragazzi fogli sui quali ci sono le cifre dall'1 all'8 disposte a caso. Alcuni ricevono l'indicazione a), altri l'indicazione b).

a) Cancellare le cifre 3, 4, 7, 8.

b) Cancellare tutte le cifre meno l'1, il 2, il 5, il 6.

Quest'ultimo esercizio si è rivelato più difficile del primo. Ciò dimostra che la riuscita nel risolvere un problema può dipendere dal tipo di formulazione.

In secondo luogo, una medesima parola può essere connessa in un problema con una determinata operazione aritmetica, in un altro problema con un'operazione differente. Se gli allievi imparano a basare la loro scelta dell'operazione partendo da una determinata parola è molto probabile che incorrano in errori. Sofferamiammo l'attenzione sugli esempi seguenti:

a) Luca leva 7 biglie da un sacchetto; ne rimangono ancora 18. Quante biglie c'erano nel sacchetto?

b) Da un sacco di 25 biglie Luca ne leva 7. Quante biglie rimangono nel sacco?

Nei due problemi ricorre il verbo «levare»: nel primo esempio esso è connesso con un'addizione, nel secondo con una sottrazione. Nell'esame dei problemi gli allievi devono centrare l'attenzione sui verbi e su determinate parole (nel, meno, più ecc.) che traducono i rapporti tra i dati, ma è altrettanto importante che si guardino bene dal basare il criterio per scegliere l'operazione appropriata su schemi associativi atinti in modo errato dall'esperienza.

Nella risoluzione di problemi complessi in cui bisogna combinare e coordinare diverse operazioni per trovare la soluzione, il successo dell'allievo è spesso condizionato dalla presenza o meno di punti intermedi per guidare le sue azioni verso la soluzione, cioè se ci sono le domande intermedie che permettono di distinguere i sottoproblemi. Può essere molto utile per risolvere i problemi più complessi definire assieme con gli allievi la successione delle tappe da seguire in quanto tale attività sviluppa le capacità d'analisi e di sintesi e di coordinamento.

Operazioni matematiche e operazioni psicologiche

Se si esamina il rapporto tra operazioni matematiche e operazioni psicologiche bisogna sottolineare il fatto che non sempre vi è una corrispondenza biunivoca tra i due tipi d'operazione. Cioè, alla stessa operazione aritmetica possono corrispondere diverse operazioni psicologiche.

Esaminiamo il caso dell'operazione più semplice, l'addizione, e illustriamo con qualche esempio come alla scrittura matematica $a+b=c$ possono corrispondere

operazioni molto diverse dal punto di vista psicologico.

Confrontiamo questi problemi.

a) Piero vince 8 biglie in una prima partita e 5 nella seconda. Quante biglie ha vinto?

b) Giorgio ha colto 9 margherite e 7 bottoni d'oro. Quanti fiori ha colto in tutto?

c) Per strada Franco ha perduto 5 sassolini. Adesso ne ha 11. Quanti sassolini aveva prima di venire qui?

Se dal punto di vista matematico i tre problemi corrispondono alla medesima struttura, quella additiva, da quello psicologico invece sono molto diversi. In a) e in c) interviene un'operazione additiva di due insiemi omogenei (biglie—biglie; sassi—sassi); in b) invece l'operazione additiva riguarda due insiemi eterogenei (margherite—bottoni d'oro), il cui risultato corrisponde a una classe più generale (quella dei fiori).

Se analizziamo il problema c) vediamo un'altra differenza per rapporto agli altri due: vi interviene la questione della successione temporale. L'allievo per trovare quanti sassi aveva all'inizio deve ripercorrere il tempo in senso inverso, cioè deve trovare la situazione di partenza conoscendo la situazione d'arrivo e la trasformazione (la perdita di 5 sassolini). Si tratta d'un problema in cui la successione temporale è capovolta, e l'allievo non può riferirsi all'esperienza vissuta.

La mancanza di corrispondenza tra operazioni matematiche e operazioni psicologiche è messa ancora meglio in evidenza nei problemi che richiedono una sottrazione. In essi, l'allievo deve tradurre nella scrittura matematica $a=b-c$ operazioni psicologiche che si presentano sotto forme diverse (ricerca d'un resto, confronto, addizione complementare).

Per comprendere che dal punto di vista matematico gli enunciati $a+b=c$; $a=c-b$; $b=c-a$ sono equivalenti, gli allievi devono compiere uno sforzo notevole di sintesi. Un tale livello può essere raggiunto progressi-

vamente attraverso numerosi esercizi sulla generalizzazione in svariate situazioni.

Confusione nel determinare l'universo operativo

A volte le difficoltà degli allievi nel risolvere problemi sugli insiemi (in cui bisogna determinare la proprietà d'un insieme, per esempio) sono legate a una confusione che si situa a livello della determinazione dell'universo in cui si deve operare. Infatti è possibile distinguere tre piani sui quali portare la riflessione.

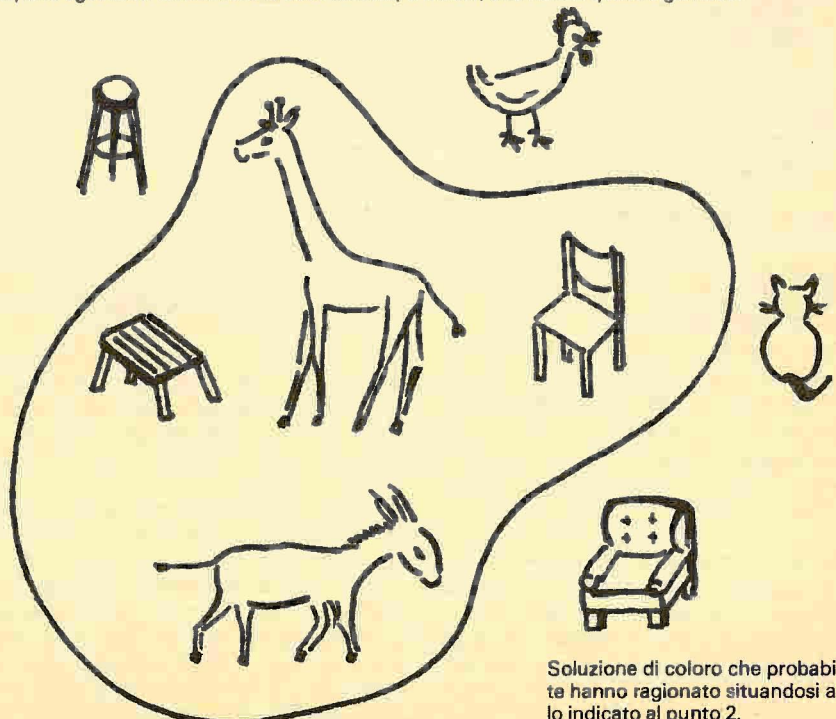
1) L'allievo è di fronte a oggetti reali; li analizza e ragiona partendo dalle loro proprietà. È il caso dei numerosi esercizi di ricerca sulle proprietà d'un materiale strutturato o di altro materiale manipolabile.

2) L'allievo è di fronte a disegni (figurativi o astratti) nei quali sono messe in risalto determinate proprietà (il colore, la forma, la presenza o l'assenza d'un particolare ecc.). Egli analizza questi stimoli percettivi e fa le sue deduzioni, partendo dalle proprietà percettive dei disegni.

3) L'allievo è di fronte a disegni o simboli che rappresentano degli oggetti e opera sulle caratteristiche di questi ultimi, caratteristiche che non necessariamente appaiono nel disegno. (È difficile astrarre dal disegno d'una gallina la caratteristica «fare le uova», senza il riferimento all'oggetto reale). In questo caso il disegno designa soltanto l'oggetto non disponibile. Sono quindi le proprietà di quest'ultimo da prendere in considerazione.

Nella fase delle rappresentazioni iconiche degli insiemi (in cui gli oggetti sono rappresentati con le figure corrispondenti) può capitare che gli allievi confondano i livelli 2 e 3 come lo mostra l'esempio seguente in cui 1/3 degli allievi di 1a classe hanno escluso dal loro insieme il gatto e la poltrona poiché dalla percezione non è possibile dedurre la caratteristica di avere quattro gambe.

(L'esercizio è stato presentato oralmente dall'insegnante). «Ecco alcuni disegni: essi rappresentano degli animali (un asino, una giraffa, una gallina, un gatto) e dei mobili (un tavolo, una sedia, una poltrona, uno sgabello). Circondate le cose (animali e mobili) che hanno quattro gambe».



Soluzione di coloro che probabilmente hanno ragionato situandosi al livello indicato al punto 2.

1) «Apprentissage par expérience directe et apprentissage par expérience médiatisée», in Perspectives vol. III, numero 1, 1973.

L'esperienza anteriore può essere fonte di errori

Se parte dai dati fornitigli dall'esperienza, il fanciullo elabora, attraverso una riorganizzazione attiva, schemi operatori) che impiega poi in situazioni analoghe. Quanto più questi modelli sono generali, tanto più sono preziosi per aiutarlo a risolvere nuovi problemi.

Può anche darsi però che i modelli astratti dall'esperienza ostacolino la risoluzione d'un nuovo problema in quanto gli allievi applicano alla nuova situazione schemi anteriori che non si addicono.

Come in certi casi essi non arrivano a scoprire l'affinità strutturale di determinati problemi e, di conseguenza, li considerano diversi, così capita anche il caso contrario in cui attribuiscono la stessa struttura a problemi sostanzialmente diversi (magari centrando l'attenzione su analogie puramente accidentali).

Ci limitiamo a presentare un esempio che secondo noi illustra l'applicazione errata d'uno schema antecedente a una situazione nuova.

Un giorno, in una 1ª classe, abbiamo svolto esercizi che consistevano nello stabilire relazioni tra una serie di foglie e gli alberi corrispondenti e tra una serie di animali (di cui un uccello) e le abitazioni corrispondenti. Alcuni giorni dopo abbiamo proposto agli stessi allievi un problema sulla nozione d'appartenenza. Essi avevano costruito un insieme di alberi mettendo assieme l'abete, la quercia ecc. (ritagliati su cartoncini) e legando al «recinto» l'etichetta con il simbolo dell'albero. In seguito, abbiamo presentato loro altri cartoncini sui quali figuravano una foglia, un albero spoglio, una pigna, un uccello e un'asse. La domanda consi-

steva a sapere se, tra questi elementi ce n'era qualcuno che potesse appartenere all'insieme di alberi. Ebbene, parecchi allievi sono incorsi in errore facendo appartenere all'insieme la foglia o/e l'uccello.

A che cosa ricollegare questo tipo di errore se non molto probabilmente al fenomeno cui abbiamo accennato, e cioè all'applicazione d'uno schema precedente a una situazione nuova, strutturalmente diversa? Per concludere, sempre a proposito dell'esperienza conviene richiamare la necessità di fare variare i dati che costituiscono il supporto dell'esperienza per evitare che la comprensione rimanga ancorata a uno schema rigido prodotto dall'abitudine. Un esempio mostrerà quanto ciò sia importante.

Siamo entrati un giorno in una 2ª classe e gli allievi stavano risolvendo un problema sugli scambi dove, a partire da una certa regola, dovevano costruire diversi insiemi equipotenti combinando i pezzi.

La regola doveva essere di questo tipo:



Abbiamo chiesto a una bambina di indicarci il pezzo che valeva di più. La bambina, con aria sorpresa per la nostra domanda rispose: «il quadrato già». «E perché il quadrato è il pezzo che vale di più?». Con altrettanta sicurezza ci rispose: «Perché il quadrato è il primo, viene prima di tutti gli altri». La risposta ci sorprese e accentuò in noi la convinzione della necessità di variare costantemente i dati dell'esperienza per evitare l'astrazione di schemi non corretti. (D'abitudine gli insegnanti presentano le regole di scambio secondo quest'ordine spaziale).

«E se la regola fosse questa» — e invertim-

mo le due serie di simboli mettendo al primo posto l'equivalenza



«quale sarebbe il pezzo che vale di più?» «Allora il triangolo perché viene prima», fu la risposta della bambina.

Questo non è un caso eccezionale. Questo anno in una prova alla fine del I ciclo abbiamo avuto la dimostrazione che parecchi allievi, in una situazione come questa, non ragionano sulle relazioni di equivalenza dei simboli, ma si riferiscono ad uno schema attinto dalle precedenti esperienze, basato sulla disposizione spaziale. Reagiscono non in modo intelligente, ma secondo uno schema associativo dato dall'abitudine. L'insegnamento moderno deve fare di tutto per impedire la formazione di questi schemi stereotipati, per garantire una vera comprensione da parte dell'allievo.

Renato Traversi

Note bibliografiche

G. GOUTARD
Les mathématiques et les enfants, Delachaux & Niestlé, Neuchâtel, 1967.

C. HUG
Il fanciullo e la matematica, Boringhieri, Torino, 1972.

J. PIAGET
Fondements scientifiques pour l'éducation de demain, in *Perspectives*, vol. II, no. 1, 1972.

G. POLYA
Come risolvere i problemi di matematica, Feltrinelli, Milano, 1967.

PROGETTO NUFFIELD PER LA MATEMATICA
Zanichelli, Bologna, 1968.

VYGOTSKIJ LURJA LEONTJEV
Psicologia e pedagogia, Editori Riuniti, Roma, 1971.

Elettronica professionale Gemetti

Un settore progressivamente ampliandosi con il costante impegno dei nostri progettisti che utilizzano oggi tecniche di domani, impiegando i componenti più moderni. Realizza fra l'altro impianti televisivi a circuito chiuso per ogni esigenza.

Nella foto un particolare della nuovissima regia audio-video ad uso didattico per il Centro cantonale audiovisivi di Lugano.

Elettronica professionale Gemetti: un ulteriore segno della profonda specializzazione di un'azienda alla quale rivolgersi con assoluta fiducia.

50 ANNI
GEMETTI
ELETTRONICA SA
LUGANO-CROCIFISSO TEL. 31717

