Dinamiche dell'educazione matematica XXIII Congresso G.I.R.P *

Le relazioni (conferenza su invito)

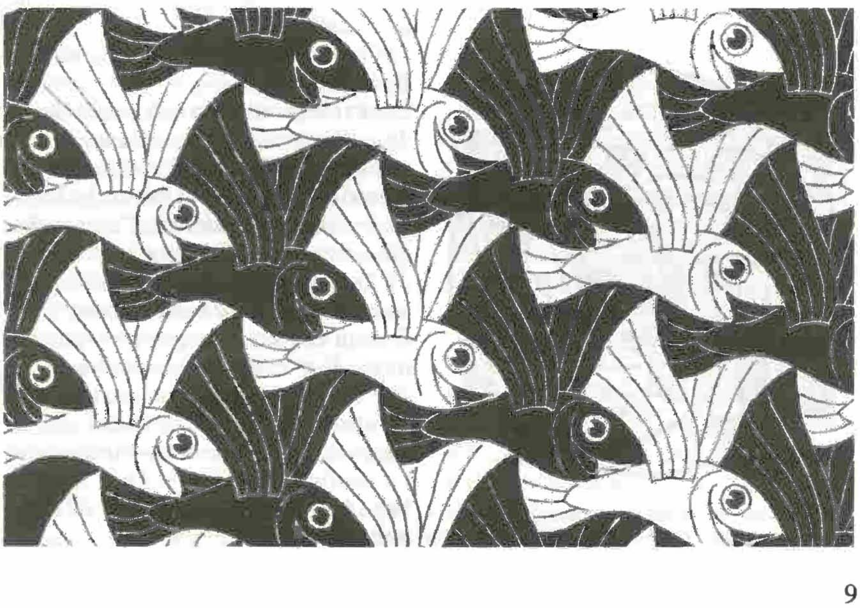
Georges Papy (Belgio) – **La dynamique des flèches**
È stato il racconto fresco e avvincente dell'avventura che Papy ha vissuto dal 1960 (anno in cui si avvicinò agli studi sulle categorie) al 1994, anno in cui dimostra il teorema sulle categorie concrete. Un discorso chiaro e rigoroso, tenuto in prima persona, di un'attività di ricerca matematica che, come spesso accade, non si è sviluppata solo fra successi, ma anche e soprattutto in mezzo agli errori, ai momenti di buio che precedono i lampi di luce vivida che a loro volta permettono di vedere ciò che normalmente non si scorge. Ma è stata anche una toccante testimonianza di vita ambientata in parte a Bruxelles (in particolare in un corso del terzo ciclo sulle categorie, tenuto da Papy) e in parte a Bogotà (Colombia), località che per Papy è una sorta di paradiso terrestre, situato sull'equatore, nel quale egli tiene corsi di matematica davanti a un uditorio che supera tranquillamente le cento presenze.

Jean–Claude Matthys (Belgio) – **Une dynamique fonctionnelle**
Matthys ha voluto testimoniarci l'importanza del concetto di relazione in matematica (e non solo!) e poi si è soffermato sul caso particolare costituito dalla funzione, definita nella sua forma più generale di relazione univoca. Seguendo la sua passione di studioso di storia della matematica, Matthys ha tracciato una sintesi del cammino storico che ha portato alla definizione odierna di funzione. È partito da Wilhelm Gottlieb Leibniz che scrisse, nel 1718, in una lettera indirizzata a Johann Bernoulli: «Qui si chiama funzione di una grandezza variabile una quantità composta in qualsiasi modo da questa grandezza variabile e da costanti».
È poi passato a Leonhard Euler, che nella sua opera «Introductio in Analysis Infinitorum» (1748) scrive: «L'analisi matematica è la scienza generale delle variabili e delle loro funzioni. (...) Una funzione di una quantità variabile è un'espressione analitica composta in qualsiasi modo da questa quantità variabile e da numeri o da quantità costanti».
A qualche secolo di distanza, ecco il concetto moderno di funzione, la freccia di Papy. Fra i diversi aspetti che assume la funzione in didattica della matematica, Matthys ha citato
- la tabella dei valori (x,y), un modello statico di funzione;
- la macchina (o scatola nera) composta di un'entrata (per esempio di numeri), di un congegno di elaborazione (l'interno della scatola nera) e di un'uscita (per esempio di numeri), considerata un modello dinamico di funzione (un esempio di scatola nera moderna è la calcolatrice tascabile);
- la rappresentazione cartesiana della funzione (nella quale le «matite-simbolo» rappresentano le ordinate nella finzione scenica didattica di Matthys), considerata un modello avente aspetti statici e aspetti dinamici.

Un'attività stimolante che può essere svolta in classe con la scatola nera è quella di cercare di indovinare la formula generale della funzione, partendo da una serie di entrate e relative uscite. E a chi si scandalizza per l'uso del verbo «indovinare» in matematica, Matthys risponde con le parole di Caleb Gattegno: «In ogni questione matematica c'è sempre un *aspetto-indovinello*».

Paola Vighi (Italia) – **Dalle opere di Escher alle trasformazioni geometriche: comportamenti degli allievi nella presentazione dell'itinerario didattico**
La Vighi ha presentato un itinerario didattico molto simile a quello già effettuato qualche anno fa da alcune classi del Luganese. Allora eravamo partiti da elementi architettonici e naturalistici raccolti nell'ambiente. In questa sperimentazione, invece, si è partiti da alcune opere di Escher molto note. Lo scopo è quello di far scoprire ai ragazzi le trasformazioni geometriche e le loro proprietà. Obiettivi del lavoro: 1) Relazioni fra figure (costruzione della trasformata, confronto figura-immagine). 2) La trasformazione come oggetto di studio. 3) Le trasformazioni come oggetti matematici, composizione, struttura algebrica.
Ed ecco infine l'elenco delle varie tappe percorse dagli allievi:
- Rappresentazione di un disegno di Escher e osservazioni di carattere qualitativo;
- Individuazione di un motivo base;
- Descrizione del movimento che fa passare da un motivo al successivo;
- Riproduzione del disegno originale;
- Descrizione rigorosa del movimento;

M.C. Escher, Sistema I^{A}, Baarn VII, 1949

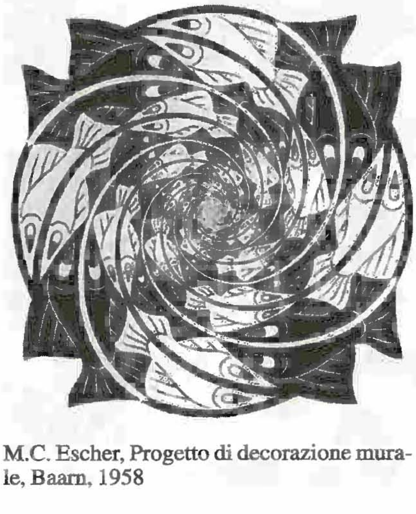


- Definizione e proprietà delle trasformazioni che sono alla base del disegno;
- Studio della linea descritta da un punto durante il movimento;
- Studio delle proprietà invarianti;
- Trasformazione come corrispondenza biunivoca;
- Composizione di trasformazioni;
- Tabella di composizione.

Angelo Pescarini (Italia) – **Orientamenti riguardanti l'educazione matematica**

Pescarini ci ha offerto una panoramica mondiale delle tendenze in didattica della matematica. Il suo discorso, molto ricco di citazioni e di spunti storici, è difficilmente sintetizzabile in poche righe. (Il testo completo apparirà sul prossimo numero del Bollettino dei docenti di matematica).

Pescarini sostiene che, prima di affrontare un tema di didattica della matematica, occorre esplicitarne le premesse pedagogiche ed epistemologiche e ritiene che il G.I.R.P. è un'occasione nella quale è possibile svolgere questo lavoro, grazie al numero volutamente limitato di partecipanti, all'organizzazione in un unico gruppo e allo spazio che viene dato all'educazione. Egli distingue (seguendo gli anglosassoni) tra educazione matematica e didattica della matematica. La prima, come finalità della *pedagogia della matematica*, sviluppa la conoscenza del pensiero matematico, promuove il suo concorso ad una prospettiva unitaria del sapere, alla *creazione dei nuovi orizzonti culturali*. Educa alla pratica del metodo *interdisciplinare*, al raggiungimento di più avanzate consapevolezze epistemologiche e storiche.



M.C. Escher, Progetto di decorazione murale, Baarn, 1958

La seconda (didattica matematica), sui due versanti della ricerca e della prassi (o didassi), mira a realizzare in modo ottimale *l'apprendimento matematico*, il suo contenuto concettuale, metodologico, tecnico.

In un prossimo futuro essa si delinea sempre più come autonoma *ricerca di base* degli insegnanti, della scuola a tutti i livelli.

L'oratore fa poi un quadro sintetico e suggestivo degli ambiti in cui la matematica può recare un contributo alla *formazione*, alla scienza, alla cultura, ad un modo di intendere l'indagine filosofica, la pratica *euristica, la risoluzione dei problemi.*

Dopo questa premessa, l'oratore affronta schematicamente, ma con profondità di analisi, il quadro dei movimenti o delle correnti pedagogico-matematiche attualmente emergenti, a partire dagli anni cinquanta. Individua diversi orientamenti di

M.C. Escher, Superficie di sfere con pesci, Baarn, 1958

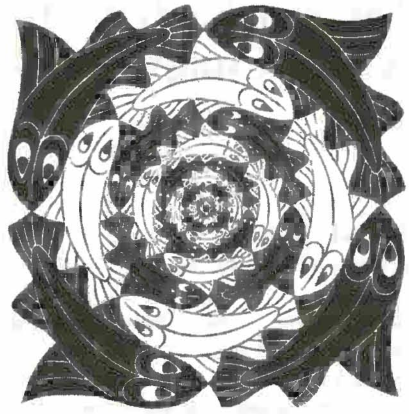
pensiero che qui possiamo soltanto rievocare.

1) Corrente d'ispirazione «strutturalista-bourbakista»

Essa si lega all'opera di quell'Euclide-collettivo moderno che assunse il nome di N. Bourbaki e ad un movimento di pensiero più vasto che ha influenzato la linguistica, l'antropologia culturale, la psicologia...

2) Corrente che privilegia l'elementarizzazione della matematica

Questa corrente propone in qualche modo l'inversione della indicazione di F. Klein per una presentazione delle «matematiche elementari da un punto di vista superiore». Importanti i contributi di Kirsch, BG. Becker, Wäsche, ma anche quelli di P.J. Hilton, G. Papy.



M.C. Escher, Pesci, Baarn, 1958

3) Corrente che privilegia l'euristica e l'apprendimento per problemi

È l'orientamento più diffuso attualmente. Suggerisce non solo strategie, procedimenti per «analogia», metodi «quasi empirici», ragionamenti «induttivi», ma indica come centrale il «*problem solving*» secondo le indicazioni magistrali di Polya e Lakatos.

4) Corrente che privilegia le finalità applicative

Si rifà alla tradizione empiristica anglosassone. Sir Lighthill al Congresso di Exeter dell'I.C.M.I del 1972 ne diede l'interpretazione più convincente. Di questa corrente si ricorda il progetto Neuffield e altri contributi di rilievo.

5) Corrente Gestaltista–fenomenologica

I promotori di questa corrente furono il Wertheimer (Pensiero produttivo), K. Stern, K. Strunz, ma soprattutto H. Freudenthal. Il suo modo di porre i problemi si rifà al metodo clinico, si ispira al Wertheimer e al Piaget, ma la sua visione dell'educazione appare romantica, libertaria, aristocratica.

6) Orientamenti in Italia

Viene presentata un po' la storia di questi ultimi cinquant'anni, il passaggio dall'influenza della scuola geometrica a quella degli analisti. Importanti i contributi di De Giorgi, Prodi, De Finetti, L.L. Radice, U.Morin, F. Speranza, Villani, Emma Castelnuovo, Campedelli.

Carla Caredda (Italia) – **Adattamento di unità didattiche, sulla probabilità, a diverse situazioni di apprendimento**

Le esperienze presentate concernono bambini di seconda elementare e altri di quarta elementare con difficoltà di apprendimento. Il quadro di riferimento è quello degli stadi evolutivi di Piaget:

- *Stadio pre-operatorio*, caratterizzato da rigidità di pensiero, difficoltà nel costruire collegamenti, egocentrismo, maggior attenzione al risultato finale piuttosto che al metodo impiegato per conseguirlo;
- *Stadio operatorio concreto*, caratterizzato da flessibilità di pensiero, capacità di stabilire collegamenti, reversibilità.

Fra le condizioni che favoriscono l'apprendimento si riconoscono fattori intellettivi e affettivi-emotivi. Inoltre ogni contenuto nuovo deve inserirsi in una struttura conoscitiva esistente.

La lezione che se ne deduce è che i concetti di probabilità, benché parecchio delicati, vanno preparati con un lavoro paziente e attento già a partire dalla scuola elementare.

Francesco Aglì, Aurelia Martini (Italia) – **Esperienze matematiche nella scuola dell'infanzia. Dalla ricerca alla didattica della matematica**

Questa volta, oltre che fornirci una nuova dimostrazione di come si può svolgere un'attività matematica, senza forzare e divertendosi, anche con i bambini della scuola dell'infanzia, ci hanno permesso di… giocare. E per una mezz'oretta adulti maturi e menti matematiche si sono trovati a giocare come bambini, provando gli stessi sentimenti di tensione, di scoramento e di esaltazione, a seconda dell'evoluzione più o meno favorevole del gioco.

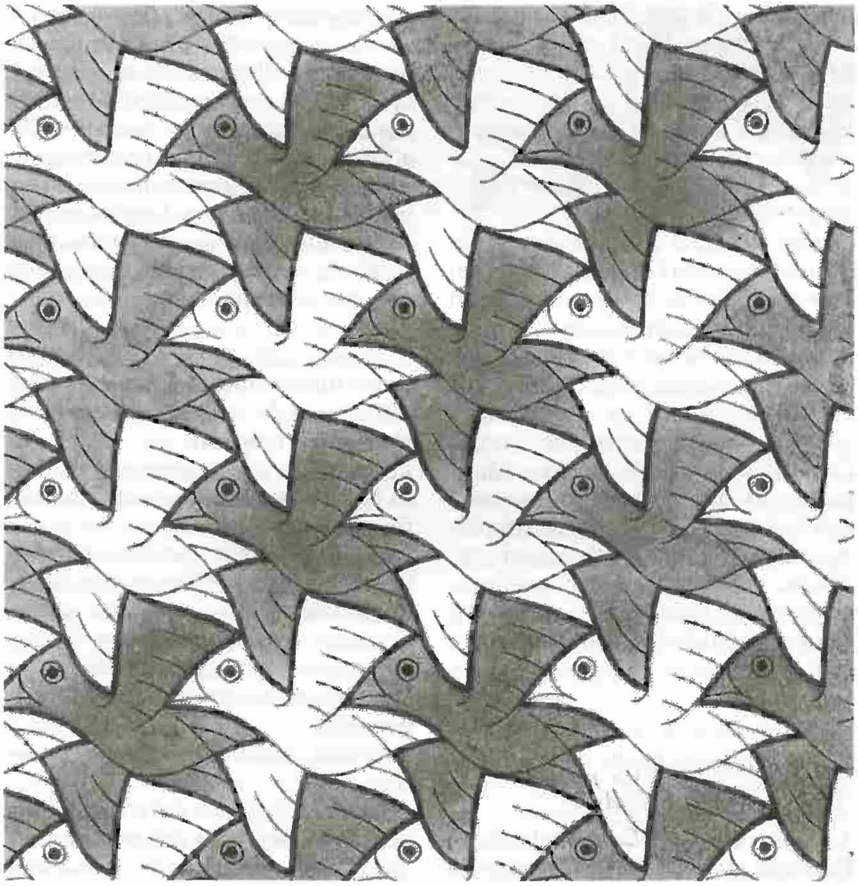
Frédérique Papy (Belgio) – **Dynamique des flèches à l'école fondamentale et dans l'enseignement spécial**

Le esperienze di Frédérique sono sempre affascinanti. Adesso lavora con ragazzi handicappati mentali, ma nella sua carriera ha insegnato matematica a tutti i livelli e con gli stessi principi metodologici. Ci dice e ci ripete che non ha senso insegnare ciò che l'allievo non può capire, ma, al contrario, bisogna trovare il modo di stimolarne la riflessione personale, unico veicolo che conduce alla vera comprensione. L'abilità dell'insegnante sta appunto nel saper creare ambienti e situazioni di apprendimento che facciano partire la riflessione personale.

Kristien De Bruyn (Belgio) – **En fonction du hasard**

La relatrice ci ha presentato una stimolante attività di calcolo delle probabilità, sotto forma di storiella che usa anche con i suoi studenti dell'«Economische Hogeschool Sint Aloysius» di Brussel, per introdurli nel calcolo delle probabilità.

La situazione presentata è molto ricca di spunti e si può adattare a qualsiasi livello scolastico.



M.C. Escher, Sistema I^D, Baarn VI, 1959

Gianfranco Arrigo (Svizzera) – **Il computer come strumento di ricerca nella lezione di matematica**

Imparare con l'ausilio del computer: ecco la grande scommessa del nostro tempo. Anche la didattica della matematica deve chinarsi su questo problema. Nelle scuole medie del Canton Ticino da qualche anno si stanno effettuando numerose sperimentazioni di integrazione dell'informatica nell'insegnamento delle varie discipline scolastiche. In questa mia relazione ho portato tre esempi nei quali gli allievi sono messi in una situazione studiata in modo che il ricorso al mezzo tecnologico diventi importante, talvolta addirittura decisivo, facendo risparmiare tempo ed energie altrimenti necessari per eseguire lavori ripetitivi ma non paganti sul piano formativo.

Primo esempio: Studio e generalizzazione di situazioni aritmetiche (IV-V elementare)

Fra i problemi di aritmetica che da anni si propongono nella scuola elementare ve ne sono di diversi tipi. Questi problemi vengono dapprima risolti con dati particolari, poi si descrive a parole il metodo di risoluzione, infine si passa alla codificazione matematica che permette di insegnare alla macchina a risolvere il problema. Usando un moderno foglio elettronico, la codificazione matematica (in linguaggio algebrico) viene praticamente capita così com'è dalla macchina, il che è un vantaggio decisivo. Confrontando famiglie diverse di problemi si scoprono dinamiche diverse di variazione dei risultati, cioè funzioni diverse. È un lavoro squisitamente formativo e preparatorio all'apprendimento del concetto di funzione.

Secondo esempio: Studio del signifi-

cato dei parametri in determinate funzioni numeriche elementari (scuola media)
Si assegnano le forme parametriche di determinate funzioni e si invitano gli allievi a ricercare il significato dei parametri. Il computer è importante in questa attività perché, in tempi impercettibili, sforna risultati numerici e rappresentazioni grafiche, in base ai quali è possibile scoprire il ruolo giocato da ogni singolo parametro. Ma la macchina, da parte sua, assume anche un ruolo attivo e fornisce stimoli nuovi e interessanti, che conducono alla scoperta del caso abnorme della pendenza verticale, dei vari modi di crescere (o di decrescere) monotonamente, del comportamento asintotico di certe funzioni, ecc.
Terzo esempio: Dove abita Enzo? (scuola media superiore)
Questa attività è stata presentata per la prima volta da Giorgio Mainini sul numero 27 del Bollettino dei docenti di matematica e ripresa da Celestino Prospero sul numero 28. Opportunamente rielaborata, ha dato vita a una stimolante ricerca in classe, nella quale, a un dato punto dei lavori, l'uso del computer è decisivo. Ma la parte più importante è costituita dall'indagine che gli allievi compiono: un lavoro fatto di congetture, verifiche, correzioni, nuove verifiche, nuove congetture, che porta a un risultato soddisfacente e facilmente controllabile.

Le comunicazioni (interventi spontanei)

A.M. Bassetto, E. Bonetti (Italia) – **Percorsi del quotidiano verso la matematica**
Le due colleghe milanesi hanno presentato una serie di stimolazioni per fare matematica: la danza, gli origami, il punto croce, gli specchi, le favole e le filastrocche, i percorsi.
È meraviglioso costatare (e la meraviglia si ripete ogni volta che lo si fa) la quantità di regolarità presenti nella musica e nella danza. Modularità e ripetitività possono essere tradotte in simboli, numeri, figure geometriche. Come dire: danzare, ricamare, piegare la carta, raccontare filastrocche, ecc. sono preziose attività... anche e soprattutto matematiche.
Le due oratrici hanno raccolto queste loro esperienze in una pubblicazione che verrà recensita prossimamente sul Bollettino dei docenti di matematica.

C. Calò-Carducci (Italia) – **Insegnamento/Apprendimento: il gioco del cambio delle regole**
E se uno più uno non facesse due? E se più per meno non facesse meno? Che cosa accadrebbe? Ecco il gioco stimolante proposto. Un'attività formativa e, aggiungerei, anche coraggiosa, visto i brividi che qualche insegnante presente in sala ha provato durante l'esposizione. Sicuramente un momento altamente educativo, che fa comprendere come la matematica si sia sviluppata anche grazie a certe scelte convenzionali fatte. Ma se ne sarebbero potuto fare altre. Gli allievi hanno anche la possibilità di apprezzare maggiormente certe convenzioni che vengono loro insegnate, constatando in prima persona le difficoltà che ne deriverebbero optando per altre convenzioni.

F. Vecino, J.M. Sordo (Spagna) – **El papel dinamizador de las variables didàcticas de las matemàticas. Un ejemplo al respecto**
I due oratori hanno presentato un'attività didattica sul calcolo dell'area di figure piane.
Le variabili didattiche indicate sono tre: il tipo di carta (bianca, a quadretti, a punti); il tipo di supporto (forme ritagliate, rappresentate con elastici sul geopiano, disegnate sulla carta); la forma di lavoro (individuale, per gruppi).
In sintesi l'itinerario didattico proposto:
1) Calcolo dell'area del rettangolo
2) Calcolo dell'area del quadrato
3) Calcolo dell'area del parallelogrammo generico
4) Calcolo dell'area del triangolo
L'esperienza è stata seguita in classe con occhi molto attenti dai due relatori che ne hanno dedotto alcune importanti degenerazioni dell'apprendimento (in direzione anche del matematichese di Bruno D'Amore). Per esempio: confusione fra densità e area; incapacità di usare unità di misura comode (gli allievi tendono ad usare le unità del sistema internazionale, anche quando non è proprio il caso); indicazione della misura senza unità; impiego dell'unità delle lunghezze per esprimere l'area; nel parallelogrammo generico, uso del lato al posto dell'altezza. Tutti gli insegnanti presenti si sono sentiti rincuorati: queste cose non capitano solo da noi...

Giancarlo Navarra (Italia) – **Dalla moltiplicazione a gelosia ai regoli di Genaille: un itinerario didattico nella storia della matematica**
Ancora una volta Navarra ci ha deliziato proponendoci un itinerario didattico completo che, partendo da una cosa abbastanza nota – la moltiplicazione a gelosia – porta il discorso verso argomenti tutt'altro che banali, come i regoli di Genaille. E tutto ciò con allievi di prima media. L'attività svolta da Navarra è una vera ricerca in classe, effettuata sulla base di documenti accuratamente scelti e su altri del tutto inventati, ma costruiti in modo da facilitare il percorso dell'allievo verso la comprensione di ciò che è alla base del calcolo meccanico, che ha poi permesso la nascita del calcolo elettronico nella nostra epoca. L'unità didattica travalica i confini dell'apprendimento matematico, per invadere i territori della storia e dell'interpretazione di testi: un altro esempio convincente di interdisciplinarietà matematica-storia-lingua.

Tonin Shkupa (Albania) – **Esame dei casi particolari, anche dei cosiddetti «degeneri», e dinamiche dell'educazione matematica**
Dammi un concetto matematico e ti trovo subito dei casi degeneri: è il punto di partenza del discorso di Shkupa. Così un trapezio si può ridurre a un triangolo diminuendo sempre di più la lunghezza di un suo lato fino a renderla nulla: è ancora un trapezio? Un triangolo può ridursi a un segmento: è ancora un triangolo? Troppo spesso, osserva il relatore, gli insegnanti liquidano questi casi senza dare loro troppo peso. Eppure, in certe situazioni, sono proprio i casi degeneri i più interessanti. Pensiamo a luoghi geometrici che cambiano sostanzialmente proprio in coincidenza con casi particolari «degeneri». Si ha l'impressione che gli insegnanti siano coscienti dell'esistenza di questi casi, ma che li evitino per non avere grane. Gli allievi, invece, difficilmente si accorgono della loro esistenza. E allora, niente di meglio che farne un argomento di ricerca in classe.

Gianfranco Arrigo

Nota (*)

G.I.R.P.: Groupe International de Recherche en Pédagogie de la Mathématique, Bressanone, Alto Adige, Italia, 21-28 luglio 1994