Leonhard Euler nel bicentenario della morte

Leonhard Euler - Da un dipinto del Museo di Monaco.

Ritratto

Figlio di un pastore protestante e amico di famiglia dei celebri fratelli matematici e fisici Jakob e Johann Bernouilli, il piccolo Leonardo Eulero[1] compie i primi passi in matematica sotto la guida di Johann, insieme ai figli di quest'ultimo: Niklaus e Daniel.
A tredici anni si iscrive alla facoltà di filosofia e di teologia dell'Università di Basilea, dove quattro anni dopo ottiene il «Magisterwürde» (una sorta di licenza in filosofia).
Un inizio, come si vede, molto promettente. Vi si aggiunga una grande passione per la ricerca matematica e uno spiccato interesse per i problemi filosofici.
L'influenza del padre (pure lui pastore) e probabilmente anche gli studi di teologia lo avvicinano a quei pensatori che nel '700 cercano la dimostrazione dell'esistenza di Dio attraverso la scoperta di leggi universali che reggono i fenomeni naturali. Eulero è particolarmente affascinato dal «Principio della minima azione», enunciato dal fisico Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, che lo fonda su basi essenzialmente teologiche. Secondo Maupertuis, le leggi del comportamento della materia rivelano la perfezione della creazione divina. Il principio della minima azione, che riprende e amplia il «Principio del tempo minimo» di Fermat (riferito solo alla propagazione dei raggi di luce), secondo questa concezione, non è solo una legge fisica, ma anche la prima prova scientifica dell'esistenza di Dio.
Questa apertura verso il «deismo scientifico» costa ad Eulero qualche frecciatina da parte di suoi contemporanei illustri. Si ricorda quella direttagli da Voltaire, che lo definisce «un uomo capace di riempire sessanta pagine di calcoli per ottenere un risultato, al quale ci si può arrivare in poche righe con un minimo di riflessione in più».
Ma Eulero non merita di certo questa cattiva allusione. Egli sta lavorando con gran fervore alla costruzione del nuovo Calcolo (il calcolo infinitesimale) e molto spesso nei suoi trattati dà più importanza allo strumento, che non ai risultati raggiunti.
L'opera di Eulero concernente il calcolo infinitesimale è senz'altro la più importante del XVIII secolo.
A tale proposito giova ricordare che l'analisi matematica (termine moderno che comprende appunto il calcolo infinitesimale) inizia la sua evoluzione nel XVII secolo (non se ne abbiano a male i greci!) grazie all'impulso di menti illuminate come Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal, Wallis e altri ancora. La seconda tappa fu dettata particolarmente da Newton e Leibniz, i quali diedero al nuovo metodo di calcolo un basamento sufficientemente solido, anche se ancora molto primitivo. Si pensi ad esempio che lo stesso Leibniz considerava la nozione di «numero di tutti i numeri interi» – oggi diremmo il cardinale di un insieme numerabile – in sé contraddittoria e quindi da rifiutare.
Alla terza tappa, quella della costruzione vera e propria del Calcolo, contribuisce in modo determinante Eulero insieme a gente come Taylor, Stirling, Moivre, D'Alambert, Legrange, Laplace, Legendre (personaggi che lo studente di oggi conosce almeno di nome già al liceo).
La quarta tappa, quella dei fondamenti teorici dell'analisi matematica, si svilupperà poi nel secolo XIX in parte anche nel nostro secolo, attraverso l'opera di Gauss, Cauchy, Dirichlet, Riemann, Bolzano, Weierstrass, Hermite, Abel, Cantor, Dedekind e altri ancora. Gli ultimi tre citati contribuirono in modo determinante ad eliminare le residue difficoltà teoriche grazie allo sviluppo della teoria degli insiemi.
Ma l'opera di Eulero (si veda anche il punto 3.) fa scuola ancora oggi, soprattutto per la genialità con la quale egli tratta le quantità infinitamente grandi: le stesse ripudiate da Leibniz ed anche dal grande Gauss, che ancora nel secolo XIX ebbe a dire «protesto contro l'uso di una grandezza infinita, che non è mai lecito in matematica»!
Molti metodi usati da Eulero vengono oggi rivalutati e ripresi dall'analisi non-standard (una teoria che ha poco più di dieci anni di vita e che forse arriverà anche nelle nostre scuole, sostituendosi all'analisi dell'«epsilon» basata sul concetto di continuità).
Attraverso i suoi lavori di analisi, Eulero introduce il concetto di funzione, dandole un significato analitico. È l'inizio dell'evoluzione di un concetto matematico universale. Nella sua «Introduzione all'analisi infinitesimale» (1748) definisce così la funzione: «una funzione di quantità variabile è un'espressione analitica composta, in qualunque modo, di questa quantità e di numeri, o di quantità costanti».
Circa cento anni dopo, Dirichlet definirà la funzione parlando di variabili dipendenti e indipendenti, che prendono valori in determinati insiemi. Infine Dedekind nella sua opera del 1878 «Was sind und was sollen die Zahlen» definirà la funzione come applicazione (proprio come la si definisce oggi nelle nostre scuole).
Per tornare ad Eulero, la sua definizione permette ai matematici di operare un salto qualitativo decisivo, senza il quale ben difficilmente avrebbero potuto inserirsi Dirichlet e Dedekind.
Col suo concetto di funzione, per esempio, Eulero opera il passaggio dai rapporti trigonometrici definiti in un triangolo rettangolo alle funzioni trigonometriche, come si studiano oggi al liceo.
Sempre nel campo dell'analisi si ricorda Eulero per aver battezzato il numero «e» ed anche per essersi occupato a fondo delle funzioni $y=e^x$ e $y=\ln x$, la cui importanza nell'analisi è conosciuta da tutti.
Ma l'opera di Eulero spazia anche al di fuori dell'analisi.
Nel primo periodo russo e in quello successivo trascorso a Berlino la sua febbrile attività lo porta ad occuparsi praticamente di tutti i campi della matematica, così come di meccanica, di costruzioni navali, di ottica, di fisica delle onde sonore, di aerostatica (l'anno in cui morì, il 1783, vi fu la prima ascensione pubblica senza passeggeri dell'aerostato ad aria calda dei fratelli Montgolfier), e l'elenco potrebbe continuare.
In Eulero inoltre (e questo è per lo più sconosciuto) si può vedere una bella figura di pedagogista. I suoi manuali sono un modello di chiarezza e di sintesi, i suoi trattati scientifici non sembrano scritti per pochi scienziati, anzi fra le righe trapela sempre lo sforzo di chiarire e di semplificare per essere capito.
Significativa a questo riguardo è l'introduzione dei diagrammi di «Eulero-Venn», per rappresentare gli insiemi, che egli usa soprattutto per concretizzare determinate proposizioni logiche (come si fa oggi nelle nostre scuole).
Ancora a questo proposito gli storiografi raccontano che il vecchio Eulero, tornato definitivamente a Pietroburgo, ormai completamente cieco, detta in tedesco al suo amico e sarto basilese l'«Introduzione completa all'algebra», dandoci un'ulteriore dimostrazione della sua sensibilità pedagogica: non si ritiene soddisfatto del testo, se non quando constata che l'amico-sarto-scrivàno ha capito perfettamente!

1. Il teorema di Eulero sui poliedri

Un poliedro è, per dirla in parole povere, una figura solida (o un solido, se si preferisce) delimitata da facce piane. Tra i poliedri più comuni riconosciamo i prismi (fra i quali i parallelepipedi) e le piramidi.

---
[1] Nel testo il nome del grande matematico del XVIII secolo ricorre sempre nella forma italianizzata e cioé *Leonardo Eulero*, conformemente alla prassi.

Biografia essenziale di Leonardo Eulero (1707-1783)

1703	l'architetto ticinese Domenico Trezzini inizia la costruzione di Pietroburgo su incarico dello zar Pietro il grande. La città diverrà la seconda patria di Eulero.
1707	nasce Leonardo Eulero a Riehen, nel canton Basilea.
1724	ottiene all'Università di Basilea il «Magisterwürde» in filosofia.
1727	arriva in Russia, chiamato dall'Accademia di Pietroburgo.
1730	è nominato professore di fisica.
1733	è nominato professore di matematica, sempre all'Accademia di Pietroburgo.
1736	pubblica il trattato sulla meccanica «Mechanica sive motus scientia analytica exposita».
1741	lascia Pietroburgo e accetta un posto all'Accademia di Berlino, dove rimarrà per 26 anni.
1744	pubblica un manuale sul calcolo delle variazioni dal titolo «Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes», nel quale riassume tutte le conoscenze fino ad allora acquisite. Pubblica inoltre un trattato di astronomia «Theoria montuum planetarum et cometarum».
1748	pubblica «Introductio in analysin infinitorum».
1755	pubblica «Institutiones calculi differentialis».
1758/ 1760	pubblica in tre volumi «Institutiones calculi integralis».
1760/ 1762	pubblica in «Lettere a una principessa tedesca» un'opera di divulgazione delle principali conoscenze della fisica del XVIII secolo.
1766/ 1770	torna definitivamente a Pietroburgo. Riprende e completa le pubblicazioni delle sue «Introduzione all'analisi infinitesimale», «Istituzioni del calcolo differenziale» e «Istituzioni del calcolo integrale».
1770	pubblica il manuale «Introduzione completa all'algebra», in lingua tedesca.
1771	pubblica il manuale di ottica «Dioptrik», pure in tedesco.
1773	muore la moglie.
1783	il 18 settembre muore Leonardo Eulero, dopo aver ancora parlato con i famigliari dell'orbita del pianeta Urano, scoperto da Herschel due anni prima.

Per essi vale il teorema di Eulero, cioè:

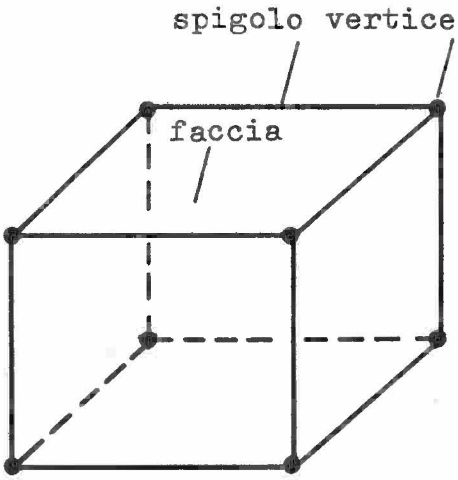


fig. 1

se v è il numero di *vertici*
s è il numero di *spigoli*
f è il numero di *facce*
allora vale la formula

$v-s+f=2$ (*)

Verifichiamo il teorema per qualche solido:

Parallelepipedo (vedere fig. 1)
$v=8$, $s=12$, $f=6$
sostituendo in (*) si ha
$8-12+6=2$, la formula è verificata.

Prisma di base un poligono di n lati
$v=2n$, $s=3n$, $f=n+2$
sostituendo in (*) si ha
$2n-3n+n+2=2$, la formula è verificata.

Tetraedro

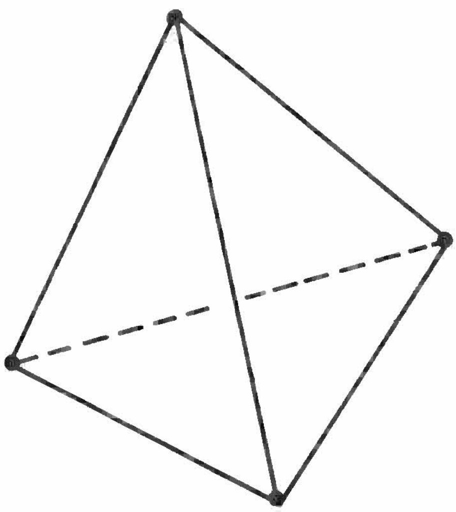


fig. 2

$v=4$, $s=6$, $f=4$
sostituendo in (*) si ha
$4-6+4=2$, la formula è verificata.

Piramide di base un poligono di n lati
$v=n+1$, $s=2n$, $f=n+1$
sostituendo in (*) si ha
$n+1-2n+n+1=2$, la formula è verificata.

Bene: a questo punto può essere interessante conoscere un po' la storia del teorema. Diciamo subito che Eulero non lo dimostra, o meglio, gli storiografi dicono che la dimostrazione di Eulero è incomprensibile. Comunque Eulero impiega più volte il teorema.

Vediamo un esempio.

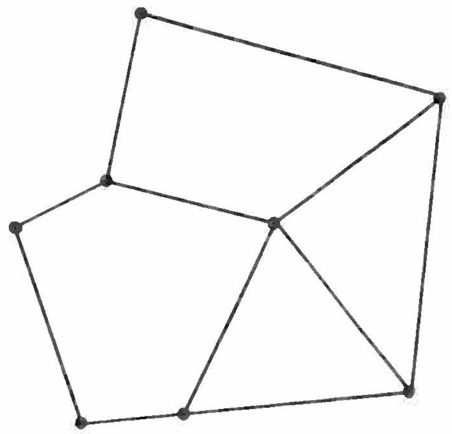


fig. 3

Questa figura rappresenta un pezzo di superficie di un poliedro qualunque. Ogni faccia è un poligono. Vi possono essere facce triangolari, quadrangolari, pentagonali, ecc. Siano $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_f$ le f facce del poliedro, ciascuna delle quali, ordinatamente, ha $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_f$ lati.

Eulero sapeva già, come i nostri allievi di scuola media dovrebbero sapere, che se un poligono ha n lati, la somma dei suoi angoli interni (intendo delle rispettive misure) è $(n-2)\cdot 180°$, anzi Eulero usa già i radianti e scrive per la faccia z_i

$$\sum_{z_i}\alpha = (n_i-2)\cdot\pi = n_i\pi - 2\pi$$

e quindi in totale sull'intero poliedro

$$\sum_{i=1}^{f}\left(\sum_{z_i}\alpha\right) = \sum_{i=1}^{f} n_i\pi - \sum_{i=1}^{f} 2\pi = \pi\cdot\sum_{i=1}^{f} n_i - 2\pi f$$

Ma, poiché ogni spigolo di un poliedro appartiene a due facce,

$$\sum_{i=1}^{f} n_i = 2s$$

e sostituendo nell'ultimo risultato otteniamo

$$\Sigma\alpha = 2\pi s - 2\pi f = (s-f)\,2\pi$$

dove $\Sigma\alpha$ sta per $\sum_{i=1}^{f}\left(\sum_{z_i}\alpha\right)$.

A questo punto Eulero sfrutta la sua formula $v-s+f=2$ dalla quale ricava $s-f=v-2$ e conclude con la formula $\Sigma\alpha=(v-2)\cdot 2\pi$ che ci può anche lasciare indifferenti, anche se contiene già un dato interessante: la somma degli angoli dipende solo dal numero dei vertici.

Se non ché la stessa fu già conosciuta da Cartesio, circa cento anni prima. Forse Cartesio conosceva già anche la formula di Eulero!

La prima dimostrazione chiara del teorema di Eulero è di Legendre e si situa circa cinquant'anni dopo la morte di Eulero.

Può essere interessante per il lettore avere un'idea della classe di poliedri che verificano la formula di Eulero. In essa troviamo tutti i poliedri convessi, cioè quelli che possiedono questa proprietà:
se A e B sono due punti qualsiasi all'interno del poliedro, allora anche il segmento AB è completamente all'interno del poliedro.
Esempio: parallelepipedi e tetraedi sono solidi convessi.

Controesempi:

Solido a)

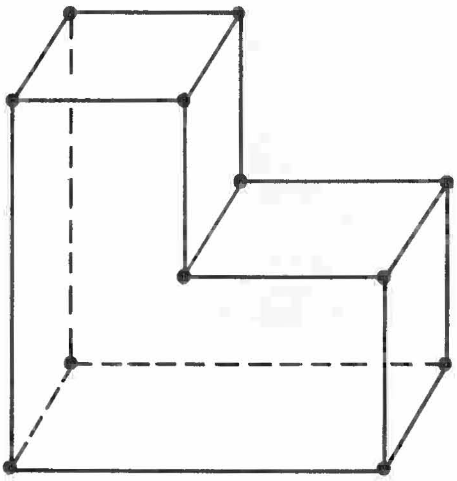


fig. 4

Solido b)

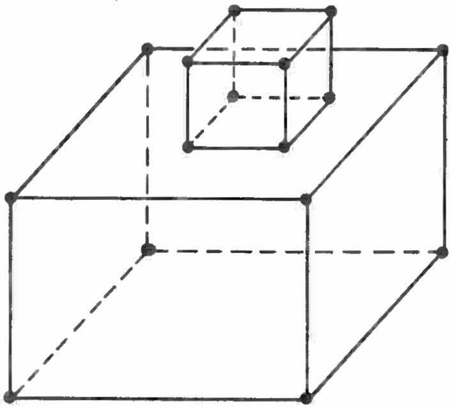


fig. 5

Il lettore a questo punto è sufficientemente motivato a fare qualche calcolino. Potrà così accorgersi che il solido a), pur non essendo convesso, verifica la formula di Eulero, mentre il solido b), pure non convesso, non la verifica.
La dimostrazione di Legendre consiste nel proiettare il poliedro, da un suo punto interno, sulla superficie di una sfera che lo contiene. Ogni solido che si può proiettare (proiezione intesa come applicazione biunivoca) sulla superficie di una sfera verifica quindi la formula di Eulero.
Può anche essere interessante osservare che, ancora circa cinquant'anni dopo la dimostrazione di Legendre, un altro matematico svizzero, Jakob Steiner, trova una nuova dimostrazione corretta della formula di Eulero, basata sulla proiezione del poliedro su di un piano.

Ecco come Steiner proietta un cubo:

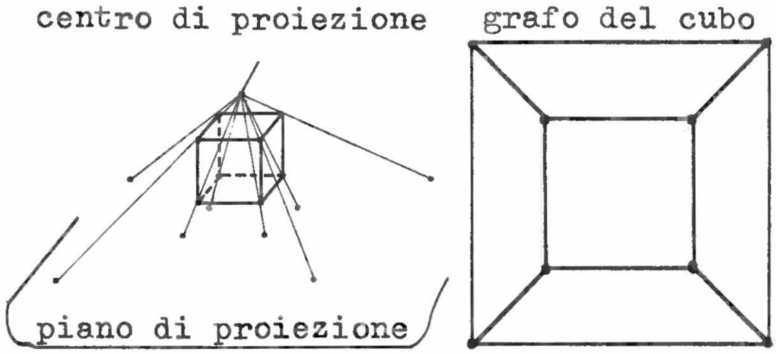


fig. 6

La Cattedrale di Basilea - Particolare di una stampa a colori di F. Kaiser, del 1798.

L'immagine del cubo è così un *grafo*, cioè un insieme di punti (vertici) uniti da segmenti (spigoli). In più è anche un grafo *planare* (cioè è possibile disegnarlo in modo che i soli punti d'incontro degli spigoli siano i vertici). Ogni vertice del poliedro ha per immagine un vertice del grafo, ogni spigolo del poliedro ha per immagine uno spigolo del grafo e ogni faccia, *tranne quella superiore*, corrisponde a una faccia (o regione) del grafo. La formula di Eulero per il grafo planare risulta così modificata:

$v - s + f = 1$

ed è appunto questa formula che Jakob Steiner ha dimostrato. (Vedi fig 6)

2. La teoria dei grafi

Gli storici fanno risalire l'origine di questa teoria al famoso problema dei ponti della città di Königsberg (oggi Kaliningrad, città russa che si affaccia sul golfo di Danzica), che è attraversata dal fiume Pregolja, che include due isole, come mostra lo schizzo seguente.

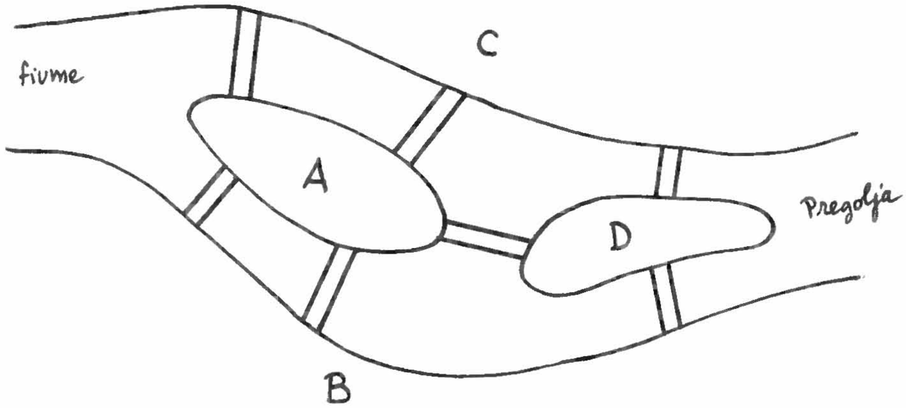


fig. 7

Si racconta che, la domenica, gli abitanti di Königsberg solevano passeggiare, facendo il giro dei quartieri A, B, C, D. La domanda che tutti avevano sulla bocca in questa occasione era semplice: «è possibile trovare un percorso che permetta, partendo da casa propria, di passare per tutti i quartieri attraversando una sola volta ogni ponte?».
Eulero tradusse questo problema in un grafo, facendo diventare i quartieri A, B, C, D altrettanti vertici e i ponti altrettanti spigoli, come mostra la figura 8.

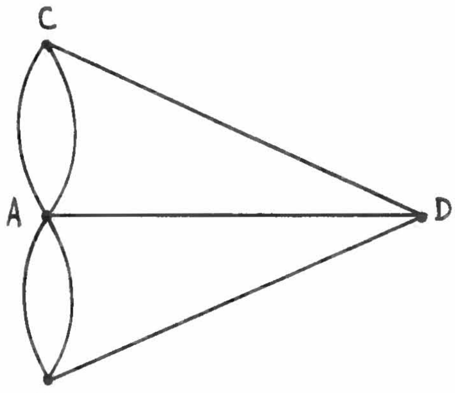


fig. 8

Problema: trovare un cammino che percorra ciascuno spigolo una e una sola volta. Questo cammino si dice oggi «cammino di Eulero».
Eulero costata e in seguito dimostra che il problema è risolvibile se il grafo è connesso (cioè ogni vertice è collegato con ogni altro vertice da almeno una successione di spigoli

consecutivi) e se in ogni vertice del grafo vi confluisce un numero pari di spigoli (si dice anche che ogni vertice ha grado pari).

Esempi: (fra parentesi il grado di ogni vertice).

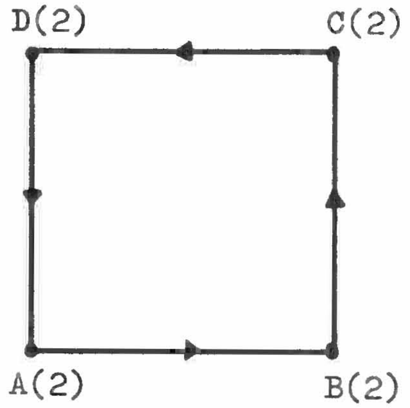


fig. 9

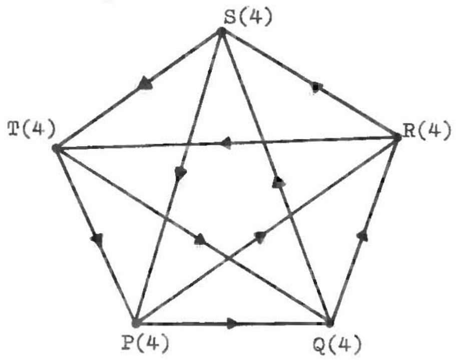
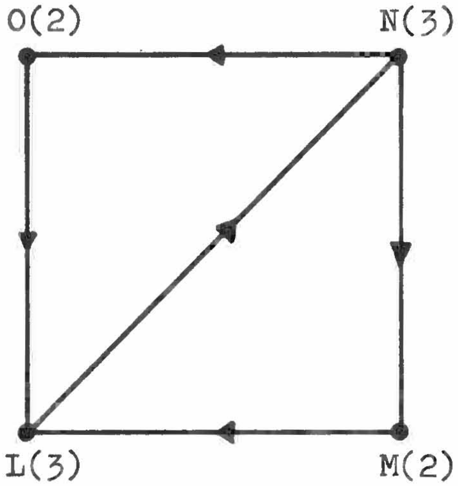


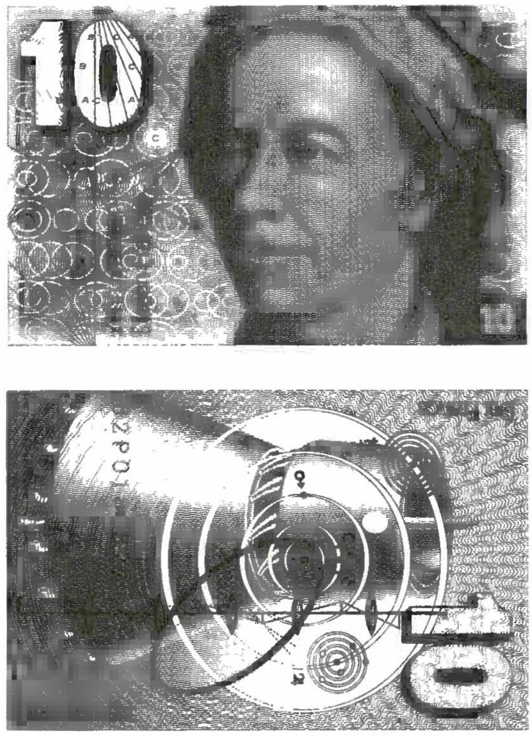
fig. 10

Questi due grafi sono anche *ciclici*, cioè i cammini di Eulero partono da un punto e arrivano ancora in quel punto.
Esistono però anche grafi non ciclici, i cui cammini iniziano da un punto P e terminano in un punto $Q \neq P$.
Per questi grafi vale il teorema seguente: «un grafo connesso non ciclico possiede un cammino di Eulero C(P, Q) se e solo se P e Q sono gli unici vertici di grado dispari».
Esempi: (fra parentesi il grado dei vertici)

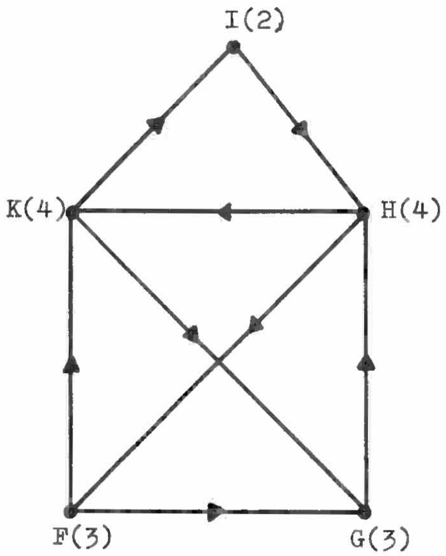


cammino di Eulero : $\mathcal{E}$(N,L)

fig. 11



Riproduzione autorizzata dalla Banca nazionale svizzera.



cammino di Eulero : $\mathcal{E}$ (F,G)

fig. 12

Controesempio:
Il grafo dei ponti di Königsberg (vedere fig. 8). Come il lettore può facilmente costatare, vi sono tre vertici di grado 3 e uno di grado 5. I bravi cittadini di Königsberg non avrebbero mai potuto fare della loro passeggiata... un cammino di Eulero.
A questo punto il lettore penserà che Eulero si sarà anche divertito con questi giochi, ma noi, uomini dell'era dell'informatica, cosa ce ne facciamo di una simile teoria?
Senza escludere il piacere che si può ancora trovare giocando coi grafi, è doveroso dire che la teoria viene applicata in parecchi campi. Si pensi ai problemi connessi alla viabilità di una città moderna, ai problemi sui trasporti, a quelli relativi ai circuiti elettronici, dove l'impiego della teoria dei grafi permette di semplificare risoluzioni estremamente complesse, ciò che è oggi essenziale per la loro realizzazione.

3. Un contibuto di Eulero all'analisi matematica

Eulero parte dalla formula di Moivre (1730):

$$\cos nz = \frac{1}{2}\left[(\cos z + i \operatorname{sen} z)^n + (\cos z - i \operatorname{sen} z)^n\right] = \cos^n z - \binom{n}{2} \cos^{n-2} z \operatorname{sen}^2 z + \binom{n}{4} \cos^{n-4} z \operatorname{sen}^4 z - + \dots$$

e scrive:
«sit arcus z infinite parvus; erit cos z = 1, sen z = z; sit autem n numerus infinite magnus, ut sit arcus zn finitae magnitudinis, puta nz = v

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - + \dots \text{ ecc.»}$$

Con simili ragionamenti arriva agli sviluppi

$$\operatorname{sen} v = v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - + \dots$$

$$e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2!} + \frac{v^3}{3!} + \dots$$

Questi sviluppi li usano anche gli studenti di oggi, al liceo. Ma nei licei scientifici si arriva anche alla *forma di Eulero per un numero complesso*.

Punto di partenza è la forma trigonometrica di un numero complesso:

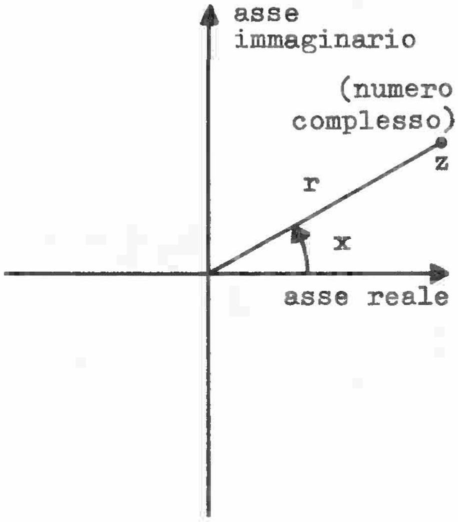


fig. 13

$z = r(\cos x + i \operatorname{sen} x)$, r è il modulo, x l'argomento.

Sostituendo gli sviluppi in serie trovati da Eulero si ottiene:

$$z = r\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\right)$$

$$+ ir\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots\right)$$

$$= r\left(1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \ldots\right)$$

e sapendo che

$i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ i^{4n} = 1$

con n numero naturale, si può scrivere

$$z = r\left(1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots\right)$$

ossia, tenendo conto dello sviluppo di e^v, con $v = ix$, si conclude

$$\boxed{z = r \cdot e^{ix}}$$

che è la forma di Eulero per un numero complesso.

Grazie a questa formula si può scrivere ad esempio:

$r(\cos x + i \operatorname{sen} x) = re^{ix}$

cioè $\quad \cos x + i \operatorname{sen} x = e^{ix}$

e sostituendo alla x il valore π:

$\cos \pi \quad + i \operatorname{sen} \pi = e^{i\pi}$

cioè $\quad -1 + i \cdot 0 = e^{i\pi}$

infine $\quad -1 = e^{i\pi}$ (∗∗)

Ebbene questa è una relazione, a dir poco, clamorosa, che mostra da sola come possa essere accattivante anche la ricerca matematica.

Grazie all'opera geniale di grandi pensatori, fra i quali si può ben dire che spicca il genio di Leonardo Eulero, è possibile arrivare a momenti di altissima sintesi, dei quali la relazione (∗∗) costituisce un modesto esempio, ma pur sempre significativo.

Si pensi insomma che la relazione (∗∗) collega in modo genialmente semplice quattro numeri famosi:

l'unità negativa, il numero «e» (definito come $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$),

il numero «i» (detto unità immaginaria e definito come $\sqrt{-1}$),

e infine il numero « π », che tutti riconoscono come l'archimediano rapporto fra la circonferenza e il relativo diametro.

Come dire: ventitre secoli di storia del pensiero matematico condensati in una formula semplicissima!

Gianfranco Arrigo

Bibliografia

MORRIS Kline, *Le matematica nella cultura occidentale*, Milano, Feltrinelli, 1976.

DIEUDONNÉ-DUGAC, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Parigi, Hermann, 1978.

OYSTEIN Ore, *I grafi e le loro applicazioni*, Bologna, Zanichelli, 1976.

KROPP Gerhard, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Mannheim, B.I., 1966.

Math Ecole, N. 109, settembre 1983.

Math - Bulletin - Ginevra, CH 5/1983.

DUGAC Pierre, *Développements des fondements de l'analyse au XIXe siècle*, Atti del corso di perfezionamento di Zinal, 4-7 ottobre 1978.

ROBERT Alain, *Initiation à l'analyse non-standard*, Atti del corso di perfezionamento di Les Paccots, 5-8 ottobre 1981.

HOPF Heinz, *Der Euler'sche Polyedersatz*, Corso di «Elementarmathematik», 1963.

Risalita del Reno sullo sfondo di Basilea, 1790. Acquaforte a colori di Johann Jakob Biedermann. Proprietà privata.